Teoria sistemelor asincrone

Serban E. Vlad

Dedicată memoriei lui Grigore Moisil

Cuprins

CAPITOLUL 1

Introducere

1. Istoricul teoriei sistemelor asincrone

Profesorul Grigore Moisil (1906-1973) este unul dintre fondatorii computer science-ului din România, fiind întemeietorul în ţara noastră a şcolii de teoria circuitelor de comutaţie. Domeniile în care a publicat lucrări cuprind de asemenea mecanica, analiza matematică, geometria, algebra şi logica matematică. Printre membrii şcolii sale putem menţiona pe George Georgescu, Şerban Basarab, Ioana Petrescu (măritată Voiculescu), Sergiu Rudeanu, Petre Ivănescu, Gheorghe Nadiu, A. Deleanu, Toma Gaşpar, I. Muntean, Dragoş Vaida, Gh. Ioanin, P. Constantinescu, C. Popovici, Mariana Coroi-Nedelcu.

Profesorul Moisil a avut o influenţă profundă asupra gândirii matematice româneşti, arătâd necesitatea orientării ei spre aplicaţii. El a simţit importanţa imensă a informaticii pentru umanitate încă din anii '50 ai secolului trecut[1] dar, desigur, ideile sale erau premature atunci, într-o atmosferă matematică dominată de curentul Bourbaki, favorabil mai degrabă studiilor teoretice decât aplicaţiilor practice. De exemplu în 1965 [**21**] el a introdus în cartea sa o colecţie originală de circuite[2] şi a propus cititorilor să continue cercetarea lor. An de an, alături de colaboratorii săi, el a studiat variate aspecte ale aşa numitei informatici teoretice, în seminarii şi mai ales in sesiunile de comunicări ale grupului de teoria sistemelor din cadrul Facultăţii de Matematică a Universităţii Bucureşti. Puţin câte puţin, cercetările s-au mutat aproape complet spre aspectele pur teoretice. Chiar mai mult, după cunoştinţa noastră, la începutul anilor '70, cercetarea din domeniul circuitelor de comutaţie practic a încetat, în ciuda recunoaşterii unanime a importanţei sale.

Modelarea în timp discret a fenomenelor de comutaţie din opera lui Moisil s-a dovedit a fi o abordare îndrăzneaţă şi în acelaşi timp o limită a teoriei sale. Într-adevăr, în acea vreme, problema gradului în care modelarea în timp discret poate aproxima modelarea realistă făcută în timp real a fost ignorată.

În consecinţă, datorită numeroaselor exemple concrete, comunitatea matematică a fost forţată să ia în considerare mai atent problema relaţiei dintre modelarea in timp discret şi modelarea în timp real. Cercetările noastre de teoria circuitelor de comutaţie au fost influenţate de ideile lui Moisil, deşi nu direct: noi am ajuns să le cunoaştem în anii studenţiei (1979-1984). În acele vremuri, electronica digitală era mai degrabă descriptivă decât formalizată matematic. Aşadar, în dorinţa de a înţelege fenomenele care au loc în circuitele de comutaţie, am devenit interesaţi

[1] Moisil spunea în 1953: 'Foarte curând oamenii se vor împărţi în două categorii: oameni bătrâni şi oameni care ştiu să lucreze la calculator'.

[2] Cuvintele: circuit de comutaţie, circuit asincron, circuit, reţea sunt considerate sinonime în acest context.

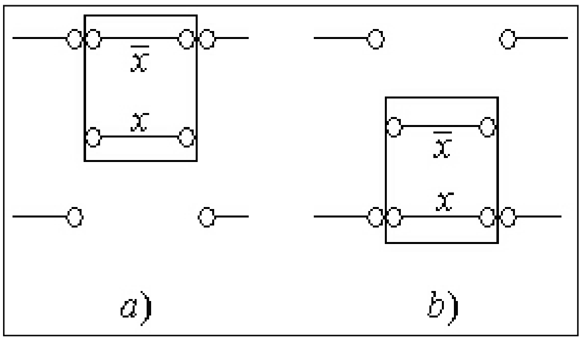

FIGURA 1. Armatură cu două contacte

de formalizarea lor matematică. A urmat o muncă dificilă de documentare, făcută cu speranţa descoperirii matematicii care stă în spatele acestor circuite. Spre marea noastră surpriză, nu am găsit aproape nimic din ceea ce ne interesa, legat în particular de studiul funcţiilor $\mathbf{R} \to \{0, 1\}$. De fapt spre sfârşitul anilor '80 profesorul Sergiu Rudeanu ne-a confirmat lipsa unui astfel de studiu în matematica mondială. Ca urmare, în anii '90 şi chiar mai înainte direcţiile noastre de investigaţie matematică erau legate inclusiv de găsirea uneltelor matematice necesare studiului circuitelor asincrone. Am ajuns la două categorii distincte de circuite. În mare vorbind, prima categorie conţine circuite de întârziere[3] care conectate în serie păstrează modelul şi a doua categorie conţine acele circuite care, legate în serie, nu păstrează modelul. Prin identificarea circuitului cu modelul său, aceeaşi idee se poate exprima sub forma: *două circuite de întârziere legate în serie formează un circuit de întârziere* în prima categorie în timp ce într-a doua, *două circuite de întârziere legate în serie nu formează un circuit de întârziere.*

Această împărţire în două categorii a rezolvat aşa numitul paradox pe care l-am descoperit în 2001. Mai exact, am găsit urmând teoriile descriptive ale profesorilor noştri două circuite de întârziere care, prin legare în serie se comportau în mod diferit de fiecare dintre ele luat separat. Acestea erau cazuri particulare de circuite din a doua categorie, pe care profesorii noştri le considerau ca fiind din prima categorie.

Soluţia de rezolvare a paradoxului a fost bazată pe modul în care Moisil gândea modelarea şi pe care mai mult sau mai puţin l-a impus în România. Probabil că aceasta a fost influenţa reală pe care marele matematician a avut-o asupra noastră.

2. Moştenirea rămasă de la Moisil

Moisil prezintă [**21**], [**22**] contactele şi releele în următorul mod[4]. Un **contact** e un dispozitiv cu două poziţii: deschis şi închis. Figura 1 conţine o armătură cu două contacte. Contactul superior al armăturii e numit **contact de deschidere**

[3] Considerăm ca sinonime expresiile circuit de întârziere şi element de întârziere. În limba engleză, pe lângă delay circuit şi delay element mai avem şi terminologia de delay buffer.

[4] În acei ani el ştia bine că circuitele asincrone pot fi realizate şi în alt mod, anume cu tuburi electronice şi cu tranzistoare. Astfel de dispozitive sunt studiate în lucrările sale. Noi am ales să prezentăm contactele şi releele deoarece ele reproduc cel mai fidel, după părerea noastră, intenţiile sale matematice, fără ca generalitatea expunerii să fie afectată.

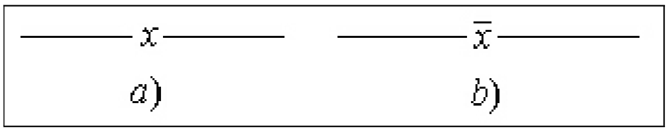

FIGURA 2. Simbolurile contactelor

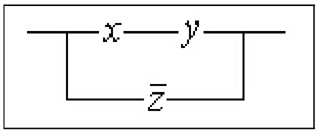

FIGURA 3. Un dipol cu contacte

şi contactul inferior e numit **contact de închidere**. O variabilă binară e asociată fiecăruia dintre ele astfel:

$x = 0$, dacă contactul de închidere e deschis;
$x = 1$, dacă contactul de închidere e închis;
$\overline{x} = 1$, dacă contactul de deschidere e închis;
$\overline{x} = 0$, dacă contactul de deschidere e deschis.

În circuite, contactele sunt simbolizate ca în Figura 2. Avem:

$x = 0$, dacă în Figura 2 a) curentul nu poate să treacă prin fir;
$x = 1$, dacă în Figura 2 a) curentul poate să treacă prin fir;
$\overline{x} = 0$, dacă în Figura 2 b) curentul nu poate să treacă prin fir;
$\overline{x} = 1$, dacă în Figura 2 b) curentul poate să treacă prin fir.

Contactele se leagă în serie şi în paralel ca în Figura 3 şi se formează astfel un **dipol**, pentru care **conductivitatea** e variabila w definită prin

$w = 0$, când dipolul nu permite curentului să treacă prin deschiderea circuitului;
$w = 1$, când dipolul permite curentului să treacă prin închiderea circuitului.

Aşadar w e o funcţie de x, y, z anume:

$$w = F(x, y, z) = x \cdot y \cup \overline{z}.$$

Am notat prin —, $\cdot$, $\cup$ legile Boolene obişnuite.

În acest moment se presupune existenţa[5] lui $\tau > 0$ aşa încât în orice interval $(n\tau, (n+1)\tau)$, orice variabilă care apare în reţea are o valoare binară constantă, notată prin $x_n, y_n, ...$ unde timpul discret n parcurge mulţimea $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

Un **releu** (ordinar) (Figura 4) e un dispozitiv constând dintr-un electromagnet care atrage o armătură cu contacte. Variabila ξ asociată curentului din înfăşurarea releului ia în fiecare interval n una din următoarele doua valori:

$\xi_n = 0$, atunci când în intervalul n curentul nu trece prin înfăşurarea releului;
$\xi_n = 1$, atunci când în intervalul n curentul trece prin înfăşurarea releului.

Ecuaţia caracteristică pentru releele ordinare cu contacte ideale e definită prin

$$x_{n+1} = \xi_n,$$

[5] Invităm cititorul să mediteze la ipoteza care urmează şi care ne-a ridicat unele semne de întrebare. Aici se justifică folosirea timpului discret în locul timpului real.

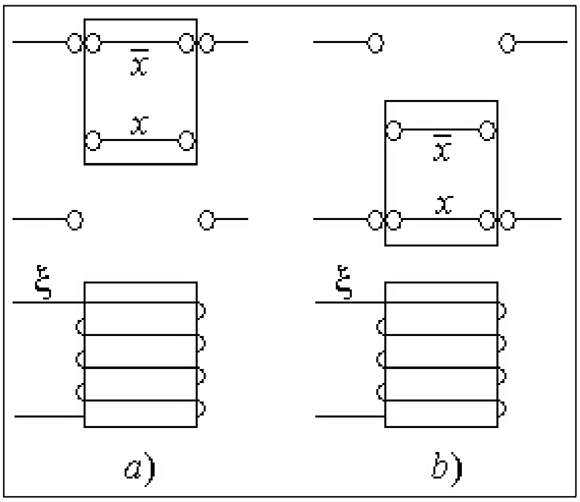

FIGURA 4. Releu ordinar

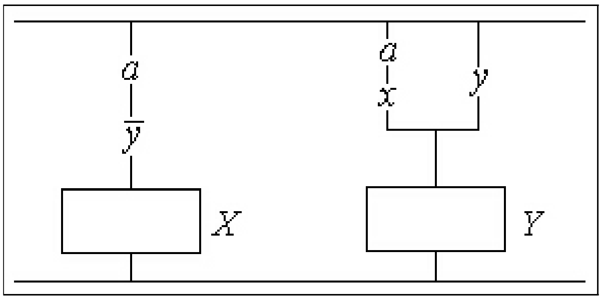

FIGURA 5. Reţea cu două relee

ceea ce înseamnă că releul acţionează ca circuit de întârziere. Mai exact, releul introduce în circuit o întârziere de o unitate de timp.

Figura 5 arată cum au fost simbolizate releele în reţea. Circuitul conţine un contact şi două relee X, Y şi îl studiem folosind cinci variabile:

a - asociată contactului;

ξ, η - asociate curenţilor din înfăşurările releelor lui X, Y;

x, y - asociate contactelor lui X, Y.

Ecuaţiile sunt:

$$\xi_n = a_n \cdot \overline{y_n},$$

$$\eta_n = a_n \cdot x_n \cup y_n,$$

$$x_{n+1} = \xi_n,$$

$$y_{n+1} = \eta_n.$$

Pornind din 'poziţia de repaus'

$$a_{-1} = x_{-1} = y_{-1} = \xi_{-1} = \eta_{-1} = 0$$

unde circuitul ar fi putut rămâne oricât de mult timp, contactul a e operat: $a_0 = 1$. Obţinem evoluţia din următorul tabel.

timp	a	x	y	ξ	η	
-1	0	0	0	0	0	poziţie de repaus
0	1	0	0	1	0	operarea lui a provoacă operarea lui X
1	1	1	0	1	1	contactul x e închis şi Y e operat
2	1	1	1	0	1	acţiunea de feed-back asupra lui X
3	1	0	1	0	1	x se deschide şi y rămâne închis
4	1	0	1	0	1	poziţie stabilă

([**22**], paginile 102, 103).

3. Despre carte

De la bun început menţionăm faptul că unele concepte introduse de noi au acelaşi nume dar sunt diferite de concepte folosite în literatură, în sensul că termeni ca asincron, inerţie, întârziere au multe înţelesuri. Mai mult, conceptele imprecise neformalizate sunt asociate de noi unor definiţii matematice precise. Acesta e motivul pentru care dăm multe definiţii.

Cartea doreşte să contruiască o teorie matematică a circuitelor asincrone.

Teoria circuitelor asincrone e o ramură a teoriei sistemelor care are scopul de a aduce sub un cadru comun modelele matematice ale circuitelor asincrone din electronica digitală. Ea foloseşte:

- conceptele generale de sistem şi pseudo-sistem care modelează blocuri funcţionale şi unde modelarea e prezentă la un nivel sintetic la fel ca şi

- conceptul particular de întârziere (sistem stabil cu intrare 1-dimensională şi ieşire 1-dimensională) care modelează porţi logice şi fire, unde modelarea e prezentă la un nivel analitic.

Începutul intereselor noastre în teoria sistemelor asincrone datează din anul 1984.

În încercarea de a produce modele de timp continuu pentru circuitele de comutaţie (unele dintre aceste circuite au fost descrise prin modelele de timp discret ale lui Moisil), am avut nevoie mai întâi să construim elemente de calcul al funcţiilor cu valori în $\{0, 1\}$, inspirându-ne din calculul funcţiilor cu valori în $\mathbf{R}$.

Astfel, la începutul anilor '90 am scris câteva lucrări de analiză matematică cu funcţii $\mathbf{R} \to \{0, 1\}$ cu dorinţa de a vedea cât de departe pot merge analogiile cu funcţiile $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Putem defini pentru funcţiile $\mathbf{R} \to \{0, 1\}$ derivate, la fel ca şi mai multe tipuri de integrale, de asemenea produse de convoluţie, distribuţii cu astfel de funcţii test şi, ca o concluzie, există o analiză matematică cu astfel de funcţii pseudo Boolene, având singurul dezavantaj al anumitor trivialităţi datorate finitudinii lui $\{0, 1\}$ comparativ cu $\mathbf{R}$. În această carte ne limităm să folosim doar rezultatele acestei cercetări care sunt strict necesare temei prezente.

În lucrarea noastră [**33**] am scris ecuaţiile diferenţiale ale unui caz particular de sistem asincron inertial determinist. Aceste ecuaţii, reproduse pe scurt sub forma (14.2) în Capitolul 13, au fost inspirate de principiul inerţial: '*o cauză produce efecte dacă şi numai dacă e persistentă*', i.e. dacă cauza acţionează în mod continuu $d > 0$ unităţi de timp, unde d e un parametru care caracterizează inerţia. În raţionamente mai de detaliu am trecut de la un parametru la doi parametri, aşa încât oricare dintre ei putea să fie identificat cu parametrul d. În mod uzual, aceşti parametri sunt consideraţi egali şi se numesc *întârzierea de transmitere a tranziţiilor* şi respectiv *pragul de anulare*.

În anul 2001 am comunicat organizatorilor titlul contribuţiei noastre la simpozionul de matematici aplicate pe care Universitatea Politehnică din Timişoara îl avea. Lucrarea noastră se referea la ceea ce reflecta în acel moment dorinţa de a înţelege principiile modelării circuitelor asincrone şi care ne-a condus spre sesizarea unor lipsuri teoretice majore, reprezentând un aparent paradox. Atunci titlul lucrării a fost schimbat, cu speranţa ca noul titlu să atragă atenţia asupra aspectului care se dovedea a fi fundamental în rezolvarea tuturor celorlalte probleme de modelare (logică, la nivel de detaliu): 'Asupra automatelor temporale: circuitul de întârziere inerţial', i.e. circuitul care implementează în electronica digitală calculul funcţiei identice $1_{\{0,1\}} : \{0,1\} \to \{0,1\}$. Un comentariu care putea fi făcut ţinând cont de literatura neformalizată existentă (prezentată la noi în Secţiunea 2 a Capitolului 10) este: 'ştim câteva posibilităţi de a modela circuitul de întârziere. Totuşi, după cum se arată în [**33**], avem o dificultate majoră, legarea în serie a modelelor a două circuite de întârziere nu reprezintă modelul unui circuit de întârziere'. Ceva de genul: *întârzierea unei întârzieri nu e o întârziere*, sau poate *inerţia inerţiei nu e inerţie*. Un 'paradox' care nu putea fi ignorat.

Soluţii au fost date în lucrările noastre [**36**] şi mai ales în [**40**]. Am introdus acolo conceptul de (condiţie sau proprietate de) întârziere = modelul matematic al circuitului de întârziere şi de asemenea conceptul de întârziere pură = ideală = fixă, reprezentând o întârziere fără inerţie. Toate întârzierile care nu sunt pure sunt prin definiţie inerţiale. 'Paradoxul' a fost soluţionat sub forma: *întârzierile inerţiale legate în serie sunt o întârziere inerţială*, însă există două posibilităţi:

- prin legare în serie, tipul de inerţie se conservă. Acesta e exemplul întârzierilor mărginite (două întârzieri mărginite legate în serie reprezintă o întârziere mărginită);

- prin legare în serie, tipul de inerţie nu se conservă. Acesta e exemplul întârzierilor relativ inerţiale (două întârzieri relativ inerţiale legate în serie nu reprezintă o întârziere relativ inerţială).

S-a întâmplat ca în lucrarea de la Timişoara să ne aflăm în cea de-a doua situaţie.

Modelarea matematică a circuitelor asincrone făcută în mod sistematizat (la nivel logic de detaliu şi în timp real) era iniţiată într-o oarecare măsură în acel moment. Alegem între mai multe tipuri de întârzieri, apoi le inserăm dacă considerăm că e necesar, înainte/după porţile logice şi în fire, pe urmă scriem şi rezolvăm ecuaţii şi inecuaţii în care apar de asemenea funcţii Boolene care se calculează instantaneu (fără întârzieri). Tehnica de analiză e destul de complicată, dar utilă pentru circuite mici, iar pentru circuite mai mari, calculatorele devin necesare.

Conceptele de sistem asincron şi pseudo-sistem asincron au fost introduse în [**37**], [**39**]. Le-am definit în sensul care ar putea fi numit în literatură ca fiind 'comportarea intrare-ieşire a unui sistem neiniţializat, nedeterminist', i.e. ca funcţii multivoce.

În mare vorbind, semnalele n-dimensionale sunt funcţiile 'simpatice' $\mathbf{R} \to \{0,1\}^n$ în timp ce un sistem (asincron) e o funcţie multivocă care asociază unui semnal m-dimensional, numit intrare (admisibilă), o mulţime nevidă de semnale

n-dimensionale, numite stări (posibile). Intrării şi stărilor li se cere să aibe o limită când $t \to -\infty$ (o valoare iniţială). Mai general decât atât, un pseudo-sistem (asincron) are şi:

- semnale fără limită atunci când $t \to -\infty$ (fără valori iniţiale);

- posibilitatea ca unei intrări $u : \mathbf{R} \to \{0,1\}^m$ să-i corespundă o mulţime vidă de stări, i.e. există intrări neadmisibile.

Naturaleţea conceptului de pseudo-sistem constă în aceea că:

- el pune în evidenţă dualitatea dintre valorile iniţiale şi cele finale ale stărilor. Proprietăţile duale de iniţializare şi stabilitate pot fi definite în acest context, care include şi o dualitate între timpul iniţial şi timpul final;

- trebuie să ţinem cont de faptul că circuite foarte simple precum bistabilul RS, de exemplu, au intrări neadmisibile ($R \cdot S = 1$ e o astfel de intrare).

Un alt scop al cărţii e acela de a propune probleme deschise, cum ar fi caracterizarea sistemelor Huffman, care e rolul injectivităţii şi al surjectivităţii, ce e neanticipativitatea - lucruri care par să fie foarte familiare.

Faptele matematice pe care le prezentăm pot fi de asemenea utile în studiul tematicii generale a teoriei sistemelor. Iată câteva teme de interes:

- sinteza, model checking (pentru detectarea erorilor făcute în proiectarea circuitelor);

- stabilitatea;

- feedback, control;

- optimizarea, controlul optimal (rezolvarea de exemplu a problemelor de timp optimal);

- controlabilitatea, accesibilitatea;

- decompozabilitatea structurală.

E de asemenea interesant de stabilit care sunt legăturile dintre această teorie şi alte teorii: reţelele Petri, logica temporală, automatele temporale.

Cartea e organizată în trei părţi: prima e dedicată teoriei generale a sistemelor, a doua teoriei întârzierilor şi a treia aplicaţiilor. Fiecare parte conţine mai multe capitole şi capitolele sunt structurate în secţiuni. Ecuaţiile, inecuaţiile şi proprietăţile logice importante sunt numerotate. Aşadar (4.3) se referă la a treia (in)ecuaţie sau proprietate logică scoasă în evidenţă a celei de-a patra secţiuni a capitolului curent; când facem referire la ecuaţia (4.3) a capitolului curent nu e nevoie să indicăm capitolul, în timp ce atunci când ne referim la aceeaşi ecuaţie din alt capitol, e nevoie să indicăm capitolul deparece el nu apare în acest număr. Sfârşitul cărţii are patru anexe: una care arată câteva intersecţii cu logica temporală, un index de noţiuni, o listă a notaţiilor folosite şi un rezumat în limba engleză.

Capitolul 2 conţine cadrul matematic necesar modelării circuitelor de comutaţie: aici se definesc spaţiile utile de funcţii binare. În Capitolul 3 introducem o clasă cuprinzătoare de modele, anume pseudo-sistemele şi câteva concepte legate de ele (starea iniţială şi finală, timpul iniţial şi final precum şi funcţiile stare iniţială şi stare finală). Cel mai important caz particular de pseudo-sistem e dat de aşa-numitele sisteme. Ele reprezintă acea situaţie când pseudo-sistemul e nevid şi e caraterizat de existenţa valorilor iniţiale ale intrărilor şi ale stărilor. Sistemele sunt tratate în Capitolul 4 împreună cu câteva noi noţiuni de interes. În Capitolul 5 se introduc cazuri particulare de sisteme şi proprietăţile lor sunt investigate şi comentate pe larg. Următorul capitol tratează accesele şi transferurile sistemelor.

Surjectivitatea, controlabilitatea şi accesibilitatea sunt problemele Capitolului 7, unde se fac comparaţii cu alte variante existente în literatură. Trei tipuri de stabilitate a sistemelor sunt subiectul Capitolului 8, care include şi câteva exemple. În Capitolul 9, după o scurtă prezentare a bine cunoscutelor definiţii neformalizate ale modului fundamental, se introduc şi se analizează transferurile fundamentale. Apoi se defineşte modul fundamental cu ajutorul acestor transferuri şi se analizează proprietăţile sale. Relaţiile dintre modul fundamental şi accesibilitate sunt puse în evidenţă prin câteva teoreme. Partea a doua e dedicată teoriei întârzierilor. Ea debutează cu definirea şi studierea întârzierilor, în Capitolul 10. Se includ mai multe tipuri de întârzieri. Categoria specială a întârzirilor mărginite e investigată în Capitolul 11, în timp ce în Capitolele 12 şi 13 se tratează întârzierile absolut inerţiale şi cele relativ inerţiale. Toate aceste trei capitole diferă de precedentele prin aceea ca ele conţin comparaţii mai multe între noţiunile introduse de noi şi cele tradiţionale. Semnificaţia şi interesul pentru aplicaţii ale prezentelor noţiuni şi proprietăţi sunt comentate atent. Partea a treia e dedicată aplicaţiilor.

Am încercat să structurăm cât mai sugestiv expunerea în definiţii, teoreme, leme, corolare, notaţii, exemple şi observaţii deoarece acest lucru dă posibilitatea unei bune înţelegeri a textului şi a unor trimiteri precise. Numărul mare al paragrafelor poate fi obositor pentru cititor, dar noi suntem convinşi că doar în acest mod a fost posibilă o tratare riguroasă.

Multe rezultate duale au fost scrise cu toate detaliile. În general, demonstraţiile sunt elementare şi unele dintre ele au fost omise, altele au fost incluse în dorinţa de a face lectura cât mai uşoară posibil. Demonstraţiile duale au fost omise.

Cartea se adresează cercetătorilor din domeniul computer science-ului, matematicienilor şi inginerilor electronişti interesaţi de modelarea circuitelor asincrone. Aplicaţiile sale sunt utile inginerilor electronişti.

Sunt recunoscător doamnei profesoare Adelina Georgescu care a acceptat să citească atent cartea noastră. Publicarea ei este rezultatul recomandărilor şi încurajărilor domniei sale.

Partea 1

Teoria sistemelor asincrone

CAPITOLUL 2

Calculul în $\mathbf{B}^n$

Se dau câteva concepte şi notaţii importante legate de funcţiile Boolene şi pseudo Boolene, care ne vor fi de mare folos în continuare. Apoi calculul din $\mathbf{B}$ se extinde la $\mathbf{B}^n$, unde $\mathbf{B}$ e algebra Boole binară. Cu ajutorul funcţiilor introduse se definesc conceptele de bază din teoria sistemelor asincrone.

1. Algebra Boole binară B

DEFINITIE 1. *Mulţimea* $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ *dotată cu topologia discretă, cu ordinea* $0 < 1$ *şi cu legile* $\overline{}, \cup, \cdot, \oplus$ *definite ca în Figura 1 se numeşte* ***algebra Boole*** *(sau* ***Booleană) binară*** *(sau* ***cu două elemente****).*

DEFINITIE 2. *Fie J o mulţime arbitrară şi să considerăm şirul binar generalizat $a_j \in \mathbf{B}, j \in J$. Definim intersecţiile şi reuniunile*

$$\bigcap_{j \in J} a_j = \begin{cases} 0, dacă\ \exists j \in J, a_j = 0 \\ 1, altfel \end{cases},$$

$$\bigcap_{j \in \emptyset} a_j = 1,$$

$$\bigcup_{j \in J} a_j = \begin{cases} 1, dacă\ \exists j \in J, a_j = 1 \\ 0, altfel \end{cases},$$

$$\bigcup_{j \in \emptyset} a_j = 0.$$

NOTATIE 1. *Pentru orice $\lambda \in \mathbf{B}^m$, folosim următoarea notaţie pentru complementul $\overline{\lambda}$ lui λ*

$$\overline{\lambda} = (\overline{\lambda_1}, ..., \overline{\lambda_m}).$$

NOTATIE 2. *Fie A o mulţime arbitrară, nevidă. Atunci*

$$P(A) = \{A' | A' \subset A\}$$

$\overline{}$	0	1
	1	0

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

FIGURA 1. Legile lui $\mathbf{B}$

e mulţimea submulţimilor lui A şi

$$P^*(A) = \{A'|A' \subset A, A' \neq \emptyset\}$$

e mulţimea submulţimilor nevide ale lui A.

In cele ce urmează, A e oricare dintre $\mathbf{R}$, $\mathbf{B}^n$ şi unele subspaţii de funcţii $\mathbf{R} \to \mathbf{B}^n$.

DEFINITIE 3. *Funcţiile $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$,*

$$\mathbf{B}^m \ni (\lambda_1, ..., \lambda_m) \longmapsto (F_1(\lambda_1, ..., \lambda_m), ..., F_n(\lambda_1, ..., \lambda_m)) \in \mathbf{B}^n$$

*sunt numite **funcţii Boolene**.*

DEFINITIE 4. ***Funcţia duală** $F^* : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ a lui F e definită prin*

$$\forall \lambda \in \mathbf{B}^m, F^*(\lambda) = \overline{F(\overline{\lambda})}.$$

OBSERVATIE 1. *Mulţimea $\mathbf{B}$ e o algebră Boole relativ la $\overline{}, \cup, \cdot$ şi un câmp relativ la $\oplus, \cdot$. Ea nu e însă un câmp ordonat, deoarece $1 \geq 0$ dar $1 \oplus 1 \leq 1 \oplus 0$.*

În acelaşi fel în care complementul $\overline{}$ lui $\mathbf{B}$ a indus o lege în $\mathbf{B}^m$, am fi putut scrie notaţii similare pentru $\cup, \cdot, \oplus$. Aceasta nu ar fi fost însă util scopurilor noastre ulterioare.

Duala lui $\overline{}$ e $\overline{}$ însăşi; duala lui $\cup$ e $\cdot$ şi vice versa. Duala lui $\oplus$ e coincidenţa $\odot$:

$$\forall \lambda_1 \in \mathbf{B}, \forall \lambda_2 \in \mathbf{B}, \lambda_1 \odot \lambda_2 = \overline{\lambda_1 \oplus \lambda_2}.$$

2. Funcţii $\mathbf{R} \to \mathbf{B}$

NOTATIE 3. *Fie $A \subset \mathbf{R}$ o mulţime. Notăm prin $\chi_A : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$ **funcţia caracteristică a mulţimii** A, definită în mod uzual*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \chi_A(t) = \begin{cases} 1, dacă\ t \in A \\ 0, altfel \end{cases}.$$

DEFINITIE 5. *Să considerăm funcţia $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$. **Mulţimea** sa **suport** (sau **suportul** său) e*

$$supp\ x = \{t|t \in \mathbf{R}, x(t) = 1\}.$$

OBSERVATIE 2. *Situaţiile extreme reprezentate prin $\chi_\emptyset(t) = 0$, $\chi_{\mathbf{R}}(t) = 1$ sunt funcţiile constante şi supp $0 = \emptyset$, supp $1 = \mathbf{R}$. Pe de altă parte, orice funcţie $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$ poate fi scrisă sub forma*

$$\forall t \in \mathbf{R}, x(t) = \chi_{supp\ x}(t).$$

Legile lui $\mathbf{B}$ induc legi notate cu aceleaşi simboluri în mulţimea funcţiilor $\mathbf{R} \to \mathbf{B}$: $\overline{x}(t) = \overline{x(t)}$, $(x \cup y)(t) = x(t) \cup y(t)$ etc. Există o bijecţie de la mulţimea funcţiilor $\mathbf{R} \to \mathbf{B}$ la mulţimea submulţimilor lui $\mathbf{R}$, care asociază lui x mulţimea supp x; prin această bijecţie, $\overline{x}$ corespunde lui $\mathbf{R} \backslash supp\ x$, $x \cup y$ corespunde lui supp $x \cup$ supp y, $x \cdot y$ corespunde lui supp $x \cap$ supp y şi $x \oplus y$ corespunde lui supp $x \Delta$ supp y.

Folosim aceeaşi notaţie $0, 1$ pentru constantele binare $0, 1 \in \mathbf{B}$ şi pentru funcţiile constante $0, 1 : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$. Similar, $\overline{}, \cup, \cdot, \oplus$ sunt folosite pentru două sau trei legi diferite fiecare dintre ele. Aceste notaţii abuzive nu vor crea confuzii.

NOTATIE 4. *Fie $d \in \mathbf{R}$ un număr real. Prin $\tau^d : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se notează translaţia $\forall t \in \mathbf{R}, \tau^d(t) = t - d$.*

DEFINITIE 6. ***Translaţia lui** $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$ **cu** $d \in \mathbf{R}$ e funcţia compusă $x \circ \tau^d : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$, $\forall t \in \mathbf{R}, (x \circ \tau^d)(t) = x(t - d)$.*

3. Funcţii monotone

DEFINITIE 7. *Funcţia* $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$ *se numeşte* ***(monoton) crescătoare*** *dacă*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall t' \in \mathbf{R}, t \leq t' \Longrightarrow x(t) \leq x(t')$$

şi ***(monoton) descrescătoare*** *dacă*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall t' \in \mathbf{R}, t \leq t' \Longrightarrow x(t) \geq x(t').$$

Proprietatea lui x de a fi monoton crescătoare, sau monoton descrescătoare e exprimată pe scurt spunând că x e ***monotonă****.*

EXEMPLU 1. *Funcţiile constante sunt monoton crescătoare şi descrescătoare în acelaşi timp. Ele sunt singurele funcţii $\mathbf{R} \to \mathbf{B}$ cu această proprietate.*

EXEMPLU 2. *Funcţiile crescătoare neconstante sunt de forma $\chi_{[d,\infty)}$, $\chi_{(d,\infty)}$ şi funcţiile descrescătoare neconstante sunt de forma $\chi_{(-\infty,d)}$, $\chi_{(-\infty,d]}$, unde $d \in \mathbf{R}$.*

OBSERVATIE 3. *Legile $\cup, \cdot$ păstrează tipul de monotonie. De exemplu, dacă x, y sunt monoton crescătoare, atunci $x \cup y$ şi $x \cdot y$ sunt monoton crescătoare. Funcţia $\overline{}$ schimbă tipul de monotonie al funcţiilor neconstante (de exemplu $\overline{\chi_{[d,\infty)}} = \chi_{(-\infty,d)}$).*

Dacă x e monotonă şi $d' \in \mathbf{R}$ e un număr arbitrar, atunci $x \circ \tau^{d'}$ e monotonă şi de acelaşi tip ca şi x (exemplu: $\chi_{[d,\infty)} \circ \tau^{d'} = \chi_{[d+d',\infty)}$).

4. Şiruri compatibile de numere reale. Diferenţiabilitate

DEFINITIE 8. *Folosim notaţia*

$$\widetilde{Seq} = \{\{t_z | t_z \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{Z}\}|$$
$$... < t_{-1} < t_0 < t_1 < ... \text{ e inferior şi superior nemărginit}\}.$$

Elementele lui $\widetilde{Seq}$ sunt notate prin $t_z, z \in \mathbf{Z}$, $(t_z)_{z\in\mathbf{Z}}$ sau simplu prin (t_z) şi în ultimul caz faptul că z parcurge $\mathbf{Z}$ e subînţeles.

TEOREMĂ 1. *Pentru orice numere $t' < t''$ şi orice şir $(t_z) \in \widetilde{Seq}$, mulţimea $\{z | z \in \mathbf{Z}, t_z \in [t', t'']\}$ e finită.*

DEMONSTRAŢIE. Mulţimea poate avea 0 elemente, 1 element sau mai mult de 1 element. În ultimul caz, există indicii $z' < z''$ aşa încât $t_{z'-1} < t' \leq t_{z'} < t_{z'+1} < ... < t_{z''-1} < t_{z''} \leq t'' < t_{z''+1}$, deci $\{z | z \in \mathbf{Z}, t_z \in [t', t'']\}$ e o mulţime finită cu $z'' - z' + 1$ elemente. $\square$

DEFINITIE 9. *Şirul $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ e numit* ***compatibil cu funcţia*** $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$ *dacă*

$$\forall z \in \mathbf{Z}, \forall \xi \in (t_z, t_{z+1}), x(\xi) = x(\frac{t_z + t_{z+1}}{2}).$$

DEFINITIE 10. *Funcţia $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$ se numeşte* ***diferenţiabilă*** *dacă există un şir compatibil cu ea, i.e. există şirul $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ aşa încât*

$$x(t) = ... \oplus x(t_{-1}) \cdot \chi_{\{t_{-1}\}}(t) \oplus x(\frac{t_{-1} + t_0}{2}) \cdot \chi_{(t_{-1},t_0)}(t) \oplus \oplus x(t_0) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus x(\frac{t_0 + t_1}{2}) \cdot \chi_{(t_0,t_1)}(t) \oplus ... \tag{4.1}$$

NOTATIE 5. *Mulţimea funcţiilor diferenţiabile se notează cu $Diff$.*

EXEMPLU 3. *Funcţiile constante sunt diferenţiabile şi orice $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ e compatibil cu ele.*

EXEMPLU 4. *Funcţia monotonă* $\chi_{[0,\infty)}$ *e diferenţiabilă şi şirurile* $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ *compatibile cu ea sunt acelea pentru care există* z *aşa ca* $t_z = 0$.

EXEMPLU 5. $\chi_{[0,1)\cup[2,3)\cup...}$ *e o funcţie diferenţiabilă şi şirurile* $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ *compatibile cu ea sunt acelea care îl includ pe* $\mathbf{N}$ *ca subşir.*

EXEMPLU 6. *Funcţia* $\chi_{\{-\frac{1}{k}|k\geq 1\}}$ *nu e diferenţiabilă deoarece pentru orice* $\varepsilon > 0$ *afirmaţia*

$$\forall \xi \in (-\varepsilon, 0), \chi_{\{-\frac{1}{k}|k\geq 1\}}(\xi) = \chi_{\{-\frac{1}{k}|k\geq 1\}}(-\frac{\varepsilon}{2})$$

e falsă.

TEOREMĂ 2. *Dacă* $x \in Diff$ *şi* (t_z) *e compatibil cu* x, *atunci orice* $(t'_z) \in \widetilde{Seq}$ *care îl conţine pe* (t_z) *ca subşir e compatibil cu* x.

DEMONSTRAŢIE. Fie $x \in Diff$, $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ compatibil cu x şi $(t'_z) \in \widetilde{Seq}$ cu $(t_z) \subset (t'_z)$ ales în mod arbitrar. Fie $z \in \mathbf{Z}$ arbitrar de asemenea. Atunci există $z_1 \in \mathbf{Z}$ şi $k \geq 1$ aşa încât $t_z = t'_{z_1}$, $t_{z+1} = t'_{z_1+k}$. În plus, putem folosi faptul că

$$\forall i \in \{0,...,k-1\}, \forall \xi \in (t'_{z_1+i}, t'_{z_1+i+1}), x(\xi) = x(\frac{t'_{z_1+i} + t'_{z_1+i+1}}{2}) = x(\frac{t_z + t_{z+1}}{2})$$

deoarece intervalul (t_z, t_{z+1}) conţine atât intervalele $(t'_{z_1}, t'_{z_1+1}), ..., (t'_{z_1+k-1}, t'_{z_1+k})$, cât şi punctele $\frac{t'_{z_1}+t'_{z_1+1}}{2}, ..., \frac{t'_{z_1+k-1}+t'_{z_1+k}}{2}$. □

TEOREMĂ 3. *Fie* $x, y \in Diff$ *şi şirurile* $(t_z)_{z\in\mathbf{Z}}$ *compatibil cu* x, *respectiv* $(t'_z)_{z\in\mathbf{Z}}$ *compatibil cu* y. *Atunci şirul* $(t''_z)_{z\in\mathbf{Z}}$ *obţinut ca reuniune a mulţimilor* $(t_z)_{z\in\mathbf{Z}}$, $(t'_z)_{z\in\mathbf{Z}}$ *urmată eventual de o reindexare, e compatibil atât cu* x *cât şi cu* y.

DEMONSTRAŢIE. Aceasta e o consecinţă a Teoremei 2. □

TEOREMĂ 4. *Dacă* x, y *sunt diferenţiabile, atunci* $\overline{x}, x \cup y, x \cdot y, x \oplus y$ *sunt de asemenea diferenţiabile.*

DEMONSTRAŢIE. Demonstrăm afirmaţia relativă la intersecţie. Fie $x, y \in Diff$ şi (t_z) un şir compatibil cu x şi y (obţinut de exemplu prin reuniunea a două şiruri, primul compatibil cu x şi al doilea compatibil cu y, urmată de o eventuală reindexare). Avem

$$(x \cdot y)(t) = x(t) \cdot y(t) =$$

$$= \quad ... \oplus x(t_{-1}) \cdot y(t_{-1}) \cdot \chi_{\{t_{-1}\}}(t) \oplus x(\frac{t_{-1}+t_0}{2}) \cdot y(\frac{t_{-1}+t_0}{2}) \cdot \chi_{(t_{-1},t_0)}(t) \oplus$$
$$\oplus x(t_0) \cdot y(t_0) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus x(\frac{t_0+t_1}{2}) \cdot y(\frac{t_0+t_1}{2}) \cdot \chi_{(t_0,t_1)}(t) \oplus ...$$

ceea ce înseamnă că (t_k) e compatibil cu $x \cdot y$; $x \cdot y$ e diferenţiabilă. □

TEOREMĂ 5. *Dacă* x *e diferenţiabilă şi* $d \in \mathbf{R}$, *atunci* $x \circ \tau^d$ *e de asemenea diferenţiabilă.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $x \in Diff$, $d \in \mathbf{R}$ şi $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ compatibil cu x. Avem

$$(x \circ \tau^d)(t) = x(t-d) =$$

$$= \quad ... \oplus x(t_{-1}) \cdot \chi_{\{t_{-1}\}}(t-d) \oplus x(\frac{t_{-1}+t_0}{2}) \cdot \chi_{(t_{-1},t_0)}(t-d) \oplus$$
$$\oplus x(t_0) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t-d) \oplus x(\frac{t_0+t_1}{2}) \cdot \chi_{(t_0,t_1)}(t-d) \oplus ... =$$
$$= ... \oplus x(t_{-1}+d-d) \cdot \chi_{\{t_{-1}+d\}}(t) \oplus$$
$$\oplus x(\frac{t_{-1}+d+t_0+d}{2} - d) \cdot \chi_{(t_{-1}+d,t_0+d)}(t) \oplus$$
$$\oplus x(t_0+d-d) \cdot \chi_{\{t_0+d\}}(t) \oplus x(\frac{t_0+d+t_1+d}{2} - d) \cdot \chi_{(t_0+d,t_1+d)}(t) \oplus ... =$$
$$= \quad ... \oplus (x \circ \tau^d)(t'_{-1}) \cdot \chi_{\{t'_{-1}\}}(t) \oplus (x \circ \tau^d)(\frac{t'_{-1}+t'_0}{2}) \cdot \chi_{(t'_{-1},t'_0)}(t) \oplus$$
$$\oplus (x \circ \tau^d)(t'_0) \cdot \chi_{\{t'_0\}}(t) \oplus (x \circ \tau^d)(\frac{t'_0+t'_1}{2}) \cdot \chi_{(t'_0,t'_1)}(t) \oplus ...$$

unde şirul cu termenul general $t'_z = t_z + d, z \in \mathbf{Z}$ e strict crescător, nemărginit inferior şi superior deci el aparţine lui $\widetilde{Seq}$. Am demonstrat că este compatibil de asemenea cu $x \circ \tau^d$, aşadar $x \circ \tau^d$ e diferenţiabilă. □

5. Limita la stânga şi limita la dreapta

Definitie 11. *Fie funcţia $x \in Diff$ şi şirul (t_z) compatibil cu ea, deci are loc ecuaţia (4.1). Funcţiile*

$$x(t-0) = ... \oplus x(\frac{t_{-1}+t_0}{2}) \cdot \chi_{(t_{-1},t_0]}(t) \oplus x(\frac{t_0+t_1}{2}) \cdot \chi_{(t_0,t_1]}(t) \oplus ... \tag{5.1}$$

$$x(t+0) = ... \oplus x(\frac{t_{-1}+t_0}{2}) \cdot \chi_{[t_{-1},t_0)}(t) \oplus x(\frac{t_0+t_1}{2}) \cdot \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus ... \tag{5.2}$$

*sunt numite **limita la stânga** şi **limita la dreapta** a lui x.*

Teoremă 6. *Dacă x e diferenţiabilă, atunci funcţiile sale limită la stânga şi limită la dreapta sunt diferenţiabile. Mai mult, orice şir (t_z) compatibil cu x e compatibil cu limitele sale de asemenea.*

Demonstraţie. Aceste afirmaţii decurg prin compararea lui (4.1) cu (5.1) şi (5.2). □

Observatie 4. *Din definiţia lui $x(t-0)$ şi $x(t+0)$ obţinem:*

$$x((t-0)-0) = x(t-0),$$
$$x((t-0)+0) = x(t+0),$$
$$x((t+0)-0) = x(t-0),$$
$$x((t+0)+0) = x(t+0).$$

Consecinţa acestui lucru e următoarea. Deoarece cu $x(t-0)$ şi $x(t+0)$ vom defini semi-derivatele şi derivatele lui x, semi-derivatele de ordin superior sunt egale cu semi-derivatele de ordin unu şi derivatele de ordin superior sunt egale cu derivatele de ordin unu.

Teoremă 7. *Dacă $x \in Diff$, atunci $x(t-0), x(t+0)$ satisfac*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \xi \in (t-\varepsilon, t), x(\xi) = x(t-0), \tag{5.3}$$

$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \xi \in (t, t+\varepsilon), x(\xi) = x(t+0). \tag{5.4}$$

DEMONSTRAŢIE. Fie (t_z) un şir compatibil cu x şi să considerăm un $t \in \mathbf{R}$ arbitrar. Atunci există un rang $z' \in \mathbf{Z}$ a lui (t_z) aşa încât $t \in (t_{z'}, t_{z'+1}]$. Orice $\varepsilon \in (0, t - t_{z'})$ satisface (5.3), unde $x(t-0) = x(\frac{t_{z'}+t_{z'+1}}{2})$. Dacă $t < t_{z'+1}$, atunci orice $\varepsilon \in (0, t_{z'+1} - t)$ satisface (5.4), unde $x(t+0) = x(\frac{t_{z'}+t_{z'+1}}{2})$ în timp ce dacă $t = t_{z'+1}$, atunci orice $\varepsilon \in (0, t_{z'+2} - t_{z'+1})$ satisface (5.4), cu $x(t+0) = x(\frac{t_{z'+1}+t_{z'+2}}{2})$. □

TEOREMĂ 8. *Fie* $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$. *Dacă există două funcţii* $\mathbf{R} \to \mathbf{B}$ *notate prin* $y(t), y'(t)$ *aşa încât*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \xi \in (t-\varepsilon, t), x(\xi) = y(t), \tag{5.5}$$

$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \xi \in (t, t+\varepsilon), x(\xi) = y'(t) \tag{5.6}$$

sunt adevărate, atunci $x \in Diff$. *Mai mult,* $y(t), y'(t)$ *ca mai înainte sunt unice şi concid cu* $x(t-0), x(t+0)$.

DEMONSTRAŢIE. Alegem un $t_0 \in \mathbf{R}$ arbitrar.

Cazul 1. Dacă $\forall \xi < t_0, x(\xi) = y(t_0)$, atunci putem alege un şir $... < t_{-2} < t_{-1} < t_0$ nermărginit inferior, altfel arbitrar.

Cazul 2. $\exists t_{-1} < t_0, \forall \xi \in (t_{-1}, t_0), x(\xi) = y(t_0)$ şi

$$x(t_{-1}) \neq y(t_0) \text{ } sau \text{ } \exists t' < t_{-1}, \forall \xi \in (t', t_{-1}), x(\xi) = y(t_{-1}) \neq y(t_0)$$

cu următoarele subcazuri.

Cazul 2.1. Dacă $\forall \xi < t_{-1}, x(\xi) = y(t_{-1})$, atunci putem alege în mod arbitrar şirul $... < t_{-3} < t_{-2} < t_{-1}$ nemărginit inferior.

Cazul 2.2. $\exists t_{-2} < t_{-1}, \forall \xi \in (t_{-2}, t_{-1}), x(\xi) = y(t_{-1})$ şi

$$x(t_{-2}) \neq y(t_{-1}) \text{ } sau \text{ } \exists t' < t_{-2}, \forall \xi \in (t', t_{-2}), x(\xi) = y(t_{-2}) \neq y(t_{-1})$$

...

În toţi aceşti paşi, existenţa şirului descrescător $... < t_{-2} < t_{-1} < t_0$ ca mai înainte e asigurată prin proprietatea (5.5) şi întrebarea pe care ne-o punem e dacă acest şir ar putea fi mărginit inferior şi atunci în mod necesar convergent spre un t':

$$\exists t' \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists z \in \mathbf{N}, 0 < t_{-z} - t' < \varepsilon.$$

Aceasta ar contrazice însă proprietatea (5.6) afirmată în punctul t'

$$\exists \varepsilon' > 0, \forall \xi \in (t', t' + \varepsilon'), x(\xi) = y'(t')$$

deoarece în intervalul $(t', t' + \varepsilon')$ am avea un număr infinit de termeni ai şirului $(t_{-z})_{z \in \mathbf{N}}$ precum şi ambele valori $0, 1$ luate de x. Şirul $... < t_{-2} < t_{-1} < t_0$ e nemărginit inferior şi

$$\forall z \in \mathbf{N}, \forall \xi \in (t_{-z-1}, t_{-z}), x(\xi) = y(t_{-z}) = x(\frac{t_{-z-1} + t_{-z}}{2}).$$

Într-un mod dual se arată faptul că există un şir nemărginit superior $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ cu

$$\forall z \in \mathbf{N}, \forall \xi \in (t_z, t_{z+1}), x(\xi) = y'(t_z) = x(\frac{t_z + t_{z+1}}{2}).$$

Şirul $(t_z)_{z \in \mathbf{Z}}$ e compatibil cu x, aşa încât x e diferenţiabilă.

Ultimele afirmaţii ale teoremei sunt evidente. □

6. Impulsuri

DEFINITIE 12. *Spunem că $x \in Diff$ are un 0-**impuls de lungime** $\delta > 0$ în punctul t' dacă*

$$\forall \xi \in (t', t' + \delta), x(\xi) = 0,$$
$$x(t' - 0) = x(t' + \delta + 0) = 1.$$

*Spunem că $x \in Diff$ are un 1-**impuls de lungime** $\delta > 0$ în punctul t' dacă*

$$\forall \xi \in (t', t' + \delta), x(\xi) = 1,$$
$$x(t' - 0) = x(t' + \delta + 0) = 0.$$

OBSERVATIE 5. *Valorile $x(t'), x(t' + \delta)$ nu apar în Definiţia 12 şi ele vor fi specificate ulterior prin condiţii de continuitate.*

7. Continuitate

TEOREMĂ 9. *Fie funcţia diferenţiabilă $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $x(t) = x(t - 0)$;

b) dacă şirul $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ e compatibil cu x, atunci avem

$$x(t) = ... \oplus x(t_0) \cdot \chi_{(t_{-1}, t_0]}(t) \oplus x(t_1) \cdot \chi_{(t_0, t_1]}(t) \oplus ... \tag{7.1}$$

Următoarele afirmaţii sunt de asemenea echivalente:

a') $x(t) = x(t + 0)$;

b') pentru orice şir $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ compatibil cu x, e satisfăcută ecuaţia

$$x(t) = ... \oplus x(t_0) \cdot \chi_{[t_0, t_1)}(t) \oplus x(t_1) \cdot \chi_{[t_1, t_2)}(t) \oplus ... \tag{7.2}$$

DEMONSTRAŢIE. *a)* $\Longrightarrow$ *b)* Comparând (4.1) cu (5.1) obţinem

$$..., x(t_0) = x(\frac{t_{-1} + t_0}{2}), x(t_1) = x(\frac{t_0 + t_1}{2}), ... \tag{7.3}$$

şi după introducerea acestor egalităţi în (4.1) rezultă (7.1).

b) $\Longrightarrow$ *a)* Dacă x e diferenţiabilă şi (7.1) e adevărată pentru un şir (t_z) compatibil cu x, atunci (7.3) e adevărată deoarece punctele $..., \frac{t_{-1}+t_0}{2}, \frac{t_0+t_1}{2}, ...$ sunt conţinute în intervalele $..., (t_{-1}, t_0), (t_0, t_1), ...$ Avem

$$x(t) \overset{(7.1)}{=} ... \oplus x(t_0) \cdot \chi_{(t_{-1}, t_0]}(t) \oplus x(t_1) \cdot \chi_{(t_0, t_1]}(t) \oplus ...$$
$$\overset{(7.3)}{=} ... \oplus x(\frac{t_{-1} + t_0}{2}) \cdot \chi_{(t_{-1}, t_0]}(t) \oplus x(\frac{t_0 + t_1}{2}) \cdot \chi_{(t_0, t_1]}(t) \oplus ... \overset{(5.1)}{=} x(t - 0)$$

Cea de-a doua afirmaţie se demonstrează similar. □

DEFINITIE 13. *Dacă $x \in Diff$ satisface una dintre condiţiile a), b) din Teorema 9, atunci ea se numeşte **diferenţiabilă continuă la stânga**. Dacă x satisface una dintre condiţiile a'), b') din Teorema 9, atunci ea se numeşte **diferenţiabilă continuă la dreapta**.*

NOTATIE 6. *Mulţimea funcţiilor diferenţiabile continue la stânga e notată prin $\widetilde{S}^*$ şi mulţimea funcţiilor diferenţiabile continue la dreapta e notată prin $\widetilde{S}$.*

TEOREMĂ 10. *Dacă $x, y \in \widetilde{S}^*$, atunci $\overline{x}, x \cup y, x \cdot y, x \oplus y \in \widetilde{S}^*$ şi dacă $x, y \in \widetilde{S}$, atunci $\overline{x}, x \cup y, x \cdot y, x \oplus y \in \widetilde{S}$.*

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem, de exemplu, că $x, y \in \widetilde{S}$ şi că $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ e un şir compatibil cu x şi y. Aplicăm (7.2) şi avem

$$\begin{aligned}(x \cup y)(t) &= x(t) \cup y(t) \\ &= (... \oplus x(t_0) \cdot \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus x(t_1) \cdot \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus ...) \cup \\ &\quad \cup(... \oplus y(t_0) \cdot \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus y(t_1) \cdot \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus ...) \\ &= ... \oplus (x(t_0) \cup y(t_0)) \cdot \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus (x(t_1) \cup y(t_1)) \cdot \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus ... \\ &= (x \cup y)(t + 0).\end{aligned}$$

Aceasta arată că $x \cup y \in \widetilde{S}$. □

TEOREMĂ 11. *Fie $d \in \mathbf{R}$. Dacă $x \in \widetilde{S}^*$, atunci $x \circ \tau^d \in \widetilde{S}^*$ şi pentru orice $x \in \widetilde{S}$ avem $x \circ \tau^d \in \widetilde{S}$.*

DEMONSTRAŢIE. Ţinând cont de (7.1), relaţia $x \in \widetilde{S}^*$ implică pentru un şir (t_z) compatibil cu x că

$$(x \circ \tau^d)(t) = ... \oplus (x \circ \tau^d)(t'_0) \cdot \chi_{(t'_{-1},t'_0]}(t) \oplus (x \circ \tau^d)(t'_1) \cdot \chi_{(t'_0,t'_1]}(t) \oplus ... = (x \circ \tau^d)(t - 0)$$

are loc, unde şirul (t'_z) definit prin $t'_z = t_z + d, z \in \mathbf{Z}$ aparţine lui $\widetilde{Seq}$. Aşadar $x \circ \tau^d \in \widetilde{S}^*$. Similar pentru cel de-al doilea caz. □

8. Valoare iniţială şi valoare finală. Semnale şi co-semnale

DEFINITIE 14. *Fie funcţia $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$. **Valoarea iniţială** $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) \in \mathbf{B}$ şi **valoarea finală** $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) \in \mathbf{B}$ a lui x sunt definite de*

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall \xi < t_0, x(\xi) = \lim_{t \to -\infty} x(t), \tag{8.1}$$

$$\exists t_f \in \mathbf{R}, \forall \xi \geq t_f, x(\xi) = \lim_{t \to \infty} x(t) \tag{8.2}$$

sau echivalent de

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, x_{|(-\infty,t_0)} = \lim_{t \to -\infty} x(t),$$

$$\exists t_f \in \mathbf{R}, x_{|[t_f,\infty)} = \lim_{t \to \infty} x(t).$$

Am notat prin $x_{|(-\infty,t_0)}, x_{|[t_f,\infty)}$ restricţiile lui x la intervalele $(-\infty, t_0)$, $[t_f, \infty)$. Ultimele doua ecuaţii arată că valoarea funcţiei e constantă. Alte notaţii pentru $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t), \lim\limits_{t \to \infty} x(t)$ sunt $x(-\infty + 0)$ şi $x(\infty - 0)$.

*Dacă pentru x are loc relaţia (8.1) (are loc relaţia (8.2)), atunci spunem că $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t)$ **există**, sau că **valoarea iniţială a lui x există**, sau că x **are valoare iniţială** ($\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$ **există**, sau că **valoarea finală a lui x există**, sau că x **are valoare finală**).*

OBSERVATIE 6. *Dacă oricare dintre $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t), \lim\limits_{t \to \infty} x(t)$ există, atunci ea e unică ceea ce rezultă din faptul că x e funcţie.*

TEOREMĂ 12. *Să presupunem că funcţiile $x, y : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$ au valori iniţiale. Atunci $\overline{x}, x \cup y, x \cdot y, x \oplus y$ au valori iniţiale egale cu $\overline{\lim\limits_{t \to -\infty} x(t)}$, $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) \cup \lim\limits_{t \to -\infty} y(t)$, $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) \cdot \lim\limits_{t \to -\infty} y(t)$, $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) \oplus \lim\limits_{t \to -\infty} y(t)$. Afirmaţii similare au loc şi pentru valorile finale ale lui x, y.*

DEMONSTRAŢIE. Evidentă. □

TEOREMĂ 13. *Să presupunem că funcţia* x *are valoare iniţială (valoare finală) şi fie* $d \in \mathbf{R}$ *arbitrar. Atunci* $x \circ \tau^d$ *are aceeaşi valoare iniţială (aceeaşi valoare finală) ca şi* x.

DEMONSTRAŢIE. Relaţia (8.1) implică

$$\forall \xi < t_0 + d, (x \circ \tau^d)(\xi) = x(-\infty + 0).$$

Aşadar valoarea iniţială $(x \circ \tau^d)(-\infty + 0)$ există şi e egală cu $x(-\infty + 0)$. □

TEOREMĂ 14. *Fie funcţia diferenţiabilă* $x \in Diff$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) există valoarea iniţială a lui x;

b) există un şir (t_z) *compatibil cu* x *astfel încât*

$$x(t) = x(t_0 - 0) \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus x(t_0) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus x(\frac{t_0 + t_1}{2}) \cdot \chi_{(t_0,t_1)}(t) \oplus \tag{8.3}$$

$$\oplus x(t_1) \cdot \chi_{\{t_1\}}(t) \oplus x(\frac{t_1 + t_2}{2}) \cdot \chi_{(t_1,t_2)}(t) \oplus ...$$

Urmatoarele afirmaţii:

a') x are valoare finală;

b') există un şir (t_z) *care e compatibil cu* x *şi*

$$x(t) = ... \oplus x(\frac{t_{-2} + t_{-1}}{2}) \cdot \chi_{(t_{-2},t_{-1})}(t) \oplus x(t_{-1}) \cdot \chi_{\{t_{-1}\}}(t) \oplus \tag{8.4}$$

$$\oplus x(\frac{t_{-1} + t_0}{2}) \cdot \chi_{(t_{-1},t_0)}(t) \oplus x(t_0) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus x(t_0 + 0) \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t)$$

sunt de asemenea echivalente.

DEMONSTRAŢIE. $a) \Longrightarrow b)$ Fie (t_z) un şir compatibil cu x. Existenţa valorii iniţiale a lui x e legată de existenţa unui $z \in \mathbf{Z}$ cu $\forall \xi < t_z, x(\xi) = x(t_z - 0)$. Printr-o posibilă reindexare a termenilor şirului (t_z) obţinem formula (8.3).

$b) \Longrightarrow a)$ Avem $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = x(t_0 - 0)$. □

EXEMPLU 7. *Funcţiile monotone au valori iniţiale şi finale.*

NOTATIE 7. *Să notăm prin*

$$S^* = \{x | x \in \widetilde{S}^*, \exists x(-\infty + 0)\},$$
$$S_c^* = \{x | x \in \widetilde{S}^*, \exists x(\infty - 0)\},$$
$$S = \{x | x \in \widetilde{S}, \exists x(-\infty + 0)\},$$
$$S_c = \{x | x \in \widetilde{S}, \exists x(\infty - 0)\}$$

spaţiile funcţiilor reprezentând mulţimea funcţiilor diferenţiabile continue la stânga cu valori iniţiale; a funcţiilor diferenţiabile continue la stânga cu valori finale; a funcţiilor diferenţiabile continue la dreapta cu valori iniţiale; şi a funcţiilor diferenţiabile continue la dreapta cu valori finale.

NOTATIE 8. *Folosim notaţiile*

$$Seq = \{\{t_k | t_k \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}\} | t_0 < t_1 < ... \text{ e nemărginit}\},$$

$$Seq^* = \{\{t_{-k} | t_{-k} \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}\} | ... < t_{-1} < t_0 \text{ e nemărginit}\}.$$

OBSERVATIE 7. *În ceea ce priveşte funcţiile $x \in Diff$, şirurile $(t_z)_{z\in\mathbf{Z}}$ compatibile cu x sunt acelea din $\widetilde{Seq}$ care fac ca (4.1) să fie adevărată. În ceea ce priveşte funcţiile $x \in Diff$ cu valoare iniţială, şirurile compatibile cu x sunt acelea din Seq (cu posibilitatea de a fi extinse în mod arbitrar la şiruri din $\widetilde{Seq}$), care fac ca ecuaţia (8.3) să fie adevărată. Relativ la funcţiile $x \in S$, putem afirma că şirurile compatibile cu x sunt cele din Seq din nou (cu posibilitatea de a fi extinse în mod arbitrar la şiruri din $\widetilde{Seq}$) care fac ca ecuaţia*

$$x(t) = x(t_0 - 0) \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus x(t_0) \cdot \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus x(t_1) \cdot \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus ...$$

să fie adevărată, după cum urmează prin compararea lui (7.2) cu (8.3). Similar pentru celălalt caz, de continuitate la stânga şi existenţă a valorii finale.

DEFINITIE 15. *Funcţiile x care aparţin oricăreia dintre $\widetilde{S}, S, S_c$ se numesc* ***semnale*** *şi funcţiile x care aparţin oricăreia dintre $\widetilde{S}^*, S^*, S_c^*$ se numesc* ***semnale**** *sau* ***co-semnale****.*

Pentru a evita orice confuzie, vom menţiona de fiecare dată cărui spaţiu de funcţii îi aparţin semnalele (sau co-semnalele).

TEOREMĂ 15. *Fie $X \in \{S^*, S_c^*, S, S_c\}$ şi $x, y \in X$. Avem $\overline{x}, x \cup y, x \cdot y, x \oplus y \in X$.*

DEMONSTRAŢIE. Acest lucru decurge din Teorema 10 şi Teorema 12. □

TEOREMĂ 16. *Fie $d \in \mathbf{R}$ şi $X \in \{S^*, S_c^*, S, S_c\}$. Dacă $x \in X$, atunci $x \circ \tau^d \in X$.*

DEMONSTRAŢIE. Rezultatul e o consecinţă a Teoremei 11 şi a Teoremei 13. □

9. Semi-derivate şi derivate

DEFINITIE 16. *Se dă funcţia diferenţiabilă $x \in Diff$. Următoarele funcţii se numesc* ***semi-derivatele la stânga***

$$\begin{aligned} D_{01}x(t) &= \overline{x(t-0)} \cdot x(t), \\ D_{10}x(t) &= x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \end{aligned}$$

şi ***semi-derivatele la dreapta***

$$\begin{aligned} D_{01}^*x(t) &= \overline{x(t)} \cdot x(t+0), \\ D_{10}^*x(t) &= x(t) \cdot \overline{x(t+0)} \end{aligned}$$

ale lui x, iar următoarele funcţii se numesc ***derivata la stânga***

$$Dx(t) = x(t-0) \oplus x(t)$$

şi ***derivata la dreapta***

$$D^*x(t) = x(t+0) \oplus x(t)$$

a lui x.

OBSERVATIE 8. *Semi-derivata $D_{01}x$ pune în evidenţă (i.e. e nenulă la) momentele de timp când x comută la stânga de la 0 la 1, în timp ce semi-derivata $D_{10}x$ pune în evidenţă (i.e. e nenulă la) momentele de timp când x comută la stânga de la 1 la 0. Derivata Dx satisface relaţiile*

$$Dx(t) = D_{01}x(t) \cup D_{10}x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot x(t) \cup x(t-0) \cdot \overline{x(t)},$$

$$supp\ Dx = supp\ D_{01}x \cup supp\ D_{10}x$$

i.e. pune în evidenţă momentele de timp când x are o discontinuitate la stânga ($x(t-0) \neq x(t)$).

Funcţia $x \in Diff$ e continuă la stânga dacă şi numai dacă $Dx = 0$.

Remarcăm şi existenţa unor afirmaţii duale referitoare la semi-derivatele la dreapta $D^*_{01}x$, $D^*_{10}x$, la derivata la dreapta D^*x şi la mulţimile supp $D^*_{01}x$, supp $D^*_{10}x$, supp D^*x.

Teoremă 17. *Pentru orice $x \in Diff$ avem $D_{01}x, D_{10}x, D^*_{01}x, D^*_{10}x, Dx, D^*x \in Diff$.*

Demonstraţie. Funcţiile $\overline{x(t)}, x(t-0), \overline{x(t-0)}, x(t+0), \overline{x(t+0)}$ sunt diferenţiabile şi reuniunile $\cup$, produsele $\cdot$ şi sumele modulo 2 $\oplus$ de funcţii diferenţiabile sunt funcţii diferenţiabile. □

Teoremă 18. *Fie $d \in \mathbf{R}$ şi $x \in Diff$. Avem $D_{01}(x \circ \tau^d) = (D_{01}x) \circ \tau^d$. Proprietăţi similare au loc de asemenea pentru celelalte semi-derivate şi derivate.*

Demonstraţie. Evidentă. □

Teoremă 19. *Fie $x \in Diff$.*

a) Dacă $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ e un şir compatibil cu x, atunci următoarele relaţii sunt adevărate

a.i) $suppD_{01}x, ..., suppD^*x \subset (t_z)$

a.ii) $suppDx \cup suppD^*x \subset (t_z)$

b) Dacă şirul $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ satisface oricare dintre a.i), a.ii) atunci e compatibil cu x.

Demonstraţie. $a)$ Fie (t_z) consistent cu x şi presupunem că x e exprimat sub forma (4.1), de unde deducem

$$D_{01}x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot x(t) =$$

$$= (... \oplus \overline{x(\frac{t_{-1}+t_0}{2})} \cdot \chi_{(t_{-1},t_0]}(t) \oplus \overline{x(\frac{t_0+t_1}{2})} \cdot \chi_{(t_0,t_1]}(t) \oplus ...) \cdot$$

$$\cdot (... \oplus x(\frac{t_{-1}+t_0}{2}) \cdot \chi_{(t_{-1},t_0)}(t) \oplus x(t_0) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus$$

$$\oplus x(\frac{t_0+t_1}{2}) \cdot \chi_{(t_0,t_1)}(t) \oplus x(t_1) \cdot \chi_{\{t_1\}}(t) \oplus ...) =$$

$$= ... \oplus \overline{x(\frac{t_{-1}+t_0}{2})} \cdot x(t_0) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus \overline{x(\frac{t_0+t_1}{2})} \cdot x(t_1) \cdot \chi_{\{t_1\}}(t) \oplus ...$$

Am obţinut că $suppD_{01}x \subset (t_z)$.

Modul de a demonstra celelalte afirmaţii de la a.i) e evident în acest moment. Mai mult:

$$suppDx \cup suppD^*x =$$

$$\overset{Observatia\ 8}{=} (suppD_{01}x \cup suppD_{10}x) \cup (suppD^*_{01}x \cup suppD^*_{10}x) \overset{a.i)}{\subset} (t_z)$$

de unde rezultă a.ii).

$b)$ Să presupunem că (t_z) nu e compatibil cu x. Aceasta înseamnă că există un $z \in \mathbf{Z}$ şi un $t \in (t_z, t_{z+1})$ aşa încât $x(t) \neq x(t-0)$ sau $x(t) \neq x(t+0)$. În ambele cazuri se contrazice una dintre incluziunile de la a.i) şi a.ii). □

Teoremă 20. *Funcţia $x \in Diff$ are valoare iniţială dacă şi numai dacă supp Dx şi supp D^*x sunt ambele mărginite inferior; x are o valoare finală dacă şi numai dacă supp Dx şi supp D^*x sunt ambele mărginite superior.*

DEMONSTRAŢIE. *Dacă* Fie $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ un şir compatibil cu x care satisface ecuaţia (4.1). Din mărginirea inferioară a lui *suppDx*, *suppD*$^*x$ deducem existenţa rangului $z_0 \in \mathbf{Z}$ cu proprietatea că *suppDx*, *suppD*$^*x \subset [t_{z_0}, \infty)$, ceea ce înseamnă că

$$\begin{gathered}..., x(\frac{t_{z_0-3}+t_{z_0-2}}{2}) = x(t_{z_0-2}), x(\frac{t_{z_0-2}+t_{z_0-1}}{2}) = x(t_{z_0-1}),\\ ..., x(t_{z_0-2}) = x(\frac{t_{z_0-2}+t_{z_0-1}}{2}), x(t_{z_0-1}) = x(\frac{t_{z_0-1}+t_{z_0}}{2})\end{gathered}$$

adică

$$..., x(\frac{t_{z_0-3}+t_{z_0-2}}{2}) = x(t_{z_0-2}) = x(\frac{t_{z_0-2}+t_{z_0-1}}{2}) = x(t_{z_0-1}) = x(\frac{t_{z_0-1}+t_{z_0}}{2}).$$

Cu alte cuvinte $\forall \xi < t_{z_0}, x(\xi) = x(t_{z_0} - 0)$.

Doar dacă Presupunerea că oricare dintre *suppDx*, *suppD*$^*x$ e nemărginită inferior reprezintă negarea afirmaţiei din Teorema 14 b). Deci afirmaţia echivalentă a) a acestei teoreme e falsă. □

10. Leme cu funcţii diferenţiabile

TEOREMĂ 21. *Fie $x \in Diff$ şi numerele $0 \leq m \leq d$. Funcţiile*

$$\begin{aligned} y(t) &= \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m]} x(\xi),\\ z(t) &= \bigcup_{\xi\in[t-d,t-d+m]} x(\xi)\end{aligned}$$

sunt diferenţiabile şi satisfac ecuaţiile

$$y(t-0) = x(t-d-0) \cdot \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m)} x(\xi), \tag{10.1}$$

$$y(t+0) = \bigcap_{\xi\in(t-d,t-d+m]} x(\xi) \cdot x(t-d+m+0), \tag{10.2}$$

$$z(t-0) = x(t-d-0) \cup \bigcup_{\xi\in[t-d,t-d+m)} x(\xi), \tag{10.3}$$

$$z(t+0) = \bigcup_{\xi\in(t-d,t-d+m]} x(\xi) \cup x(t-d+m+0). \tag{10.4}$$

DEMONSTRAŢIE. Dacă $m = 0$, atunci $y(t) = z(t) = x(t-d)$ e diferenţiabilă şi folosim Definiţia 2 ($\bigcap_{\xi\in\emptyset} x(\xi) = 1$, $\bigcup_{\xi\in\emptyset} x(\xi) = 0$).

Presupunem acum că $m > 0$. Fie t arbitrar şi fixat. Limita la stânga a lui x în $t-d$ arată existenţa lui $\varepsilon_1 > 0$ cu

$$\forall \xi \in (t-d-\varepsilon_1, t-d), x(\xi) = x(t-d-0)$$

şi limita la stânga a lui x în $t-d+m$ arată existenţa lui $\varepsilon_2 > 0$ aşa încât

$$\forall \xi \in (t-d+m-\varepsilon_2, t-d+m), x(\xi) = x(t-d+m-0).$$

Pentru orice $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, m\}$ deducem

$$y(t-\varepsilon) = \bigcap_{\xi\in[t-d-\varepsilon,t-d+m-\varepsilon]} x(\xi) = \bigcap_{\xi\in[t-d-\varepsilon,t-d)} x(\xi) \cdot \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m-\varepsilon]} x(\xi) =$$

$$= x(t-d-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m-\varepsilon]} x(\xi) = x(t-d-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m-\varepsilon]} x(\xi) \cdot x(t-d+m-0) =$$

$$= x(t-d-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m-\varepsilon]} x(\xi) \cdot \bigcap_{\xi \in (t-d+m-\varepsilon, t-d+m)} x(\xi) =$$

$$= x(t-d-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m)} x(\xi).$$

Deoarece valoarea lui $y(t-\varepsilon)$ nu depinde de ε, obţinem $y(t-\varepsilon) = y(t-0)$ şi deoarece t e arbitrar, (10.1) e demonstrată.

Limita la dreapta a lui x în $t-d$ arată existenţa lui $\varepsilon_3 > 0$ aşa incât

$$\forall \xi \in (t-d, t-d+\varepsilon_3), x(\xi) = x(t-d+0)$$

şi, pe de altă parte, limita la dreapta a lui x în $t-d+m$ arată existenţa lui $\varepsilon_4 > 0$ cu

$$\forall \xi \in (t-d+m, t-d+m+\varepsilon_4), x(\xi) = x(t-d+m+0).$$

Luăm un $0 < \varepsilon' < \min\{\varepsilon_3, \varepsilon_4, m\}$, pentru care avem

$$y(t+\varepsilon') = \bigcap_{\xi \in [t-d+\varepsilon', t-d+m+\varepsilon']} x(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t-d+\varepsilon', t-d+m]} x(\xi) \cdot \bigcap_{\xi \in (t-d+m, t-d+m+\varepsilon']} x(\xi) =$$

$$= \bigcap_{\xi \in [t-d+\varepsilon', t-d+m]} x(\xi) \cdot x(t-d+m+0) =$$

$$= x(t-d+0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d+\varepsilon', t-d+m]} x(\xi) \cdot x(t-d+m+0) =$$

$$= \bigcap_{\xi \in (t-d, t-d+\varepsilon')} x(\xi) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d+\varepsilon', t-d+m]} x(\xi) \cdot x(t-d+m+0) =$$

$$= \bigcap_{\xi \in (t-d, t-d+m]} x(\xi) \cdot x(t-d+m+0).$$

Faptul că $y(t+\varepsilon')$ nu depinde de ε' arată că $y(t+\varepsilon') = y(t+0)$ şi deoarece t e arbitrar, (10.2) e demonstrată. Aşadar, datorită Teoremei 8, y e diferenţiabilă.

Demonstraţia pentru z e similară. □

TEOREMĂ 22. *În condiţiile Teoremei 21 şi folosind notaţiile precedente, avem:*

$$\overline{y(t-0)} \cdot y(t) = \overline{x(t-d-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m]} x(\xi), \tag{10.5}$$

$$y(t-0) \cdot \overline{y(t)} = x(t-d-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m)} x(\xi) \cdot \overline{x(t-d+m)}, \tag{10.6}$$

$$\overline{z(t-0)} \cdot z(t) = \overline{x(t-d-0)} \cdot \overline{\bigcup_{\xi \in [t-d, t-d+m)} x(\xi)} \cdot x(t-d+m), \tag{10.7}$$

$$z(t-0) \cdot \overline{z(t)} = x(t-d-0) \cdot \overline{\bigcup_{\xi \in [t-d, t-d+m]} x(\xi)}. \tag{10.8}$$

DEMONSTRAŢIE. Relaţiile (10.5) şi (10.7) se demonstrează după cum urmează:

$$\begin{aligned}
\overline{y(t-0)}\cdot y(t) &= \overline{x(t-d-0)\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m)} x(\xi)}\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m]} x(\xi) = \\
&= (\overline{x(t-d-0)}\cup \overline{\bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m)} x(\xi)})\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m]} x(\xi) = \\
&= \overline{x(t-d-0)}\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m]} x(\xi);
\end{aligned}$$

$$\overline{z(t-0)}\cdot z(t) = \overline{x(t-d-0)\cup \bigcup_{\xi\in[t-d,t-d+m)} x(\xi)}\cdot \bigcup_{\xi\in[t-d,t-d+m]} x(\xi) =$$

$$= \overline{x(t-d-0)}\cdot \overline{\bigcup_{\xi\in[t-d,t-d+m)} x(\xi)}\cdot (\bigcup_{\xi\in[t-d,t-d+m)} x(\xi)\cup x(t-d+m)) =$$

$$= \overline{x(t-d-0)}\cdot \overline{\bigcup_{\xi\in[t-d,t-d+m)} x(\xi)}\cdot x(t-d+m).$$

□

TEOREMĂ 23. *Fie* $X\in\{\widetilde{S}^*,\widetilde{S},S^*,S_c^*,S,S_c\}$. *Dacă* $x\in X$, *atunci* $y,z\in X$.

DEMONSTRAŢIE. Alegem $X=S$. Dacă $m=0$ şi $y(t)=z(t)=x(t-d)$, atunci datorită Teoremei 16, $x\circ\tau^d\in S$. Din acest moment considerăm că $m>0$.

Din Teorema 21 ştim că y e diferenţiabilă, aşadar trebuie să arătăm că ea satisface egalitatea $y(t)=y(t+0)$ şi că $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)$ există. Fie t arbitrar şi fixat. Continuitatea la dreapta a lui x în $t-d$ arată că există $\varepsilon_1>0$ cu

$$\forall\xi\in[t-d,t-d+\varepsilon_1),x(\xi)=x(t-d)$$

şi continuitatea la dreapta a lui x în $t-d+m$ arată existenţa lui $\varepsilon_2>0$ aşa încât

$$\forall\xi\in(t-d+m,t-d+m+\varepsilon_2),x(\xi)=x(t-d+m).$$

Fie $0<\varepsilon<\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,m\}$. Concluzionăm că

$$y(t+\varepsilon) = \bigcap_{\xi\in[t-d+\varepsilon,t-d+m+\varepsilon]} x(\xi) = \bigcap_{\xi\in[t-d+\varepsilon,t-d+m]} x(\xi)\cdot \bigcap_{\xi\in(t-d+m,t-d+m+\varepsilon]} x(\xi) =$$

$$= \bigcap_{\xi\in[t-d+\varepsilon,t-d+m]} x(\xi)\cdot x(t-d+m) = \bigcap_{\xi\in[t-d+\varepsilon,t-d+m]} x(\xi) =$$

$$= x(t-d)\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d+\varepsilon,t-d+m]} x(\xi) =$$

$$= \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+\varepsilon)} x(\xi)\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d+\varepsilon,t-d+m]} x(\xi) = \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m]} x(\xi) = y(t).$$

Deci $y(t+\varepsilon)=y(t+0)=y(t)$. Cum t e arbitrar, funcţia y e continuă la dreapta .

Mai departe, proprietatea de existenţă a valorii iniţiale e îndeplinită deoarece din aceea că

$$\forall\xi<t_0,x(\xi)=x(-\infty+0),$$

de deduce

$$\forall\xi<t_0+d-m,\ \bigcap_{\omega\in[\xi-d,\xi-d+m]} x(\omega)=x(-\infty+0)=y(-\infty+0).$$

Am demonstrat că $y \in S$.

Demonstraţia pentru z e duală. □

TEOREMĂ 24. *Dacă $x \in Diff$ şi $d > 0$, funcţiile*

$$y'(t) = \bigcap_{\xi \in [t-d,t)} x(\xi),$$
$$z'(t) = \bigcup_{\xi \in [t-d,t)} x(\xi)$$

sunt diferenţiabile şi satisfac relaţiile

$$y'(t-0) = x(t-d-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d,t)} x(\xi),$$

$$y'(t+0) = \bigcap_{\xi \in (t-d,t]} x(\xi) \cdot x(t+0),$$

$$z'(t-0) = x(t-d-0) \cup \bigcup_{\xi \in [t-d,t)} x(\xi),$$

$$z'(t+0) = \bigcup_{\xi \in (t-d,t]} x(\xi) \cup x(t+0).$$

DEMONSTRAŢIE. E similară demonstraţiei Teoremei 21. □

OBSERVATIE 9. *Spre deosebire de Teorema 23, unde s-a demonstrat că continuitatea la dreapta a lui x implică continuitatea la dreapta a lui y, în Teorema 24 continuitatea la dreapta a lui x nu implică continuitatea la dreapta a lui y' deoarece avem*

$$y'(t+0) = \bigcap_{\xi \in (t-d,t]} x(\xi) \cdot x(t+0) = \bigcap_{\xi \in (t-d,t]} x(\xi) \neq y'(t)$$

şi similar pentru celelalte trei situaţii. Concluzionăm că funcţiile $y'(t), z'(t)$ trebuiesc folosite cu atenţie.

11. Convenţii despre graficele funcţiilor $\mathbf{R} \to \mathbf{B}$

OBSERVATIE 10. *Pentru a uşura înţelegerea funcţiilor $\mathbf{R} \to \mathbf{B}$ (care sunt diferenţiabile, de obicei) facem următoarele convenţii referitoare la desenarea graficelor lor:*

a) cele două valori 0,1 nu se scriu pe axa verticală. Se presupune ca ele sunt subînţelese şi avem nevoie de convenţia ca valoarea mai mică să fie asociată cu 0 şi ca valoarea ridicată să fie asociată cu 1;

b) valoarea 0 *a axei orizontale nu e scrisă. Convenţia e că* 0 *reprezintă intersecţia axelor orizontală şi verticală;*

c) desenăm linii verticale prin acele puncte (de discontinuitate) unde funcţia comută, chiar dacă liniile verticale nu aparţin graficului;

d) punem bulinuţe pe liniile verticale desenate aşa ca la c), subliniind în acest mod punctele care aparţin de fapt graficului (valorile funcţiei în punctele unde comută).

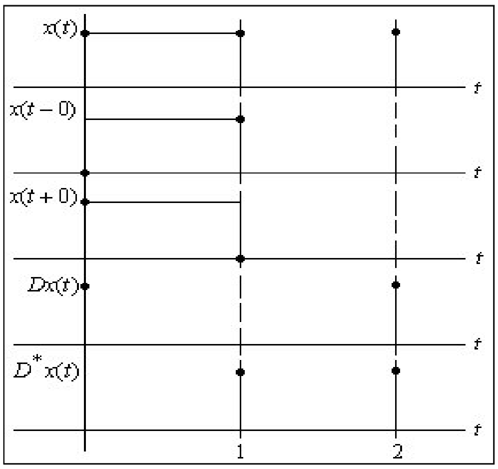

FIGURA 2. Convenţii privitoare la desenarea graficelor

EXEMPLU 8. *Funcţia* $x(t) = \chi_{[0,1]}(t) \oplus \chi_{\{2\}}(t)$ *e diferenţiabilă, cu puncte de discontinuitate atât la stânga cât şi la dreapta. Mai precis, avem*

$$\begin{aligned} x(t-0) &= \chi_{(0,1]}(t), \\ x(t+0) &= \chi_{[0,1)}(t), \\ Dx(t) &= \chi_{\{0,2\}}(t), \\ D^*x(t) &= \chi_{\{1,2\}}(t). \end{aligned}$$

Am desenat în Figura 2 graficele acestor funcţii.

12. Funcţii $\mathbf{R} \to \mathbf{B}^n$

Am menţionat deja modalitatea de obţinere din n şiruri $(t_z^1), ..., (t_z^n) \in \widetilde{Seq}$ compatibile cu $x_1, ..., x_n \in Diff$ a unui şir (t_z) compatibil cu toate aceste funcţii, prin reindexarea elementelor mulţimii $(t_z^1) \cup ... \cup (t_z^n)$. În continuare acest şir e folosit ca să exprime validitatea ecuaţiei (4.1) pentru funcţia $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$. Invers, funcţiile diferenţiabile $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}^n$ se pot defini prin existenţa unui şir $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ cu proprietatea că formula (4.1) e adevărată. În acest caz, funcţiile coordonate $x_1, ..., x_n$ sunt diferenţiabile ele însele, iar şirul (t_z) compatibil x e compatibil şi cu toate aceste funcţii. Mulţimea funcţiilor diferenţiabile $\mathbf{R} \to \mathbf{B}^n$ e notată cu $Diff^{(n)}$.

Fie $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ un şir compatibil cu funcţiile $x_1, ..., x_n \in Diff$. Ecuaţiile (5.1), (5.2) care sunt îndeplinite de către $x_1, ..., x_n$ sunt îndeplinite şi de funcţia $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$. Invers, limitele la stânga $x(t-0)$ şi la dreapta $x(t+0)$ ale lui $x \in Diff^{(n)}$ sunt definite prin validitatea formulelor (5.1), (5.2) de unde deducem că

$$x(t-0) = (x_1(t-0), ..., x_n(t-0)),$$
$$x(t+0) = (x_1(t+0), ..., x_n(t+0)).$$

Continuitatea la stânga şi la dreapta a lui $x \in Diff^{(n)}$ constă în egalităţile $x(t) = x(t-0)$ şi respectiv $x(t) = x(t+0)$ şi e echivalentă cu continuitatea la stânga şi la dreapta a funcţiilor coordonate. Formulele (7.1), (7.2) sunt adevărate când sunt scrise atât pentru x cât şi pentru $x_1, ..., x_n$, unde $(t_z) \in \widetilde{Seq}$ e compatibil cu toate funcţiile coordonate $x_1, ..., x_n$. Notăm prin $\widetilde{S}^{*(n)}, \widetilde{S}^{(n)} \subset Diff^{(n)}$ mulţimile funcţiilor diferenţiabile care sunt continue la stânga şi respectiv continue la dreapta.

Definiţia valorii iniţiale $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) \in \mathbf{B}^n$ şi a valorii finale $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) \in \mathbf{B}^n$ a lui $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}^n$ se face tot prin formulele (8.1), (8.2) în timp ce existenţa valorii iniţiale/finale a lui x constă în existenţa valorilor iniţiale/finale ale funcţiilor coordonate. Formulele (8.3), (8.4) sunt adevărate dacă $x \in Diff^{(n)}$ are o valoare iniţială, respectiv o valoare finală (i.e. dacă $x_1, ..., x_n \in Diff$ au valori iniţiale şi respectiv finale). Noile notaţii sunt:

$$S^{*(n)} = \{x | x \in \widetilde{S}^{*(n)}, \exists x(-\infty + 0)\},$$

$$S_c^{*(n)} = \{x | x \in \widetilde{S}^{*(n)}, \exists x(\infty - 0)\},$$

$$S^{(n)} = \{x | x \in \widetilde{S}^{(n)}, \exists x(-\infty + 0)\},$$

$$S_c^{(n)} = \{x | x \in \widetilde{S}^{(n)}, \exists x(\infty - 0)\}.$$

Funcţiile care aparţin lui $\widetilde{S}^{(n)}, S^{(n)}, S_c^{(n)}$ se numesc **semnale n-dimensionale** şi funcţiile care aparţin lui $\widetilde{S}^{*(n)}, S^{*(n)}, S_c^{*(n)}$ se numes **co-semnale n-dimensionale**, sau **semnale* n-dimensionale**.

Nu vom folosi notaţia vectorială a semi-derivatelor şi a derivatelor funcţiilor diferenţiabile $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}^n$ chiar dacă acest lucru e posibil.

Să mai observăm că, din definiţia lui $\overline{x}, x \cup y, x \cdot y, x \oplus y$ pentru funcţiile $x, y : \mathbf{R} \to \mathbf{B}$, funcţiile Boolene $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ care definesc pentru orice $u : \mathbf{R} \to \mathbf{B}^m$, funcţia $F(u(\cdot)) : \mathbf{R} \to \mathbf{B}^n$, $\mathbf{R} \ni t \longmapsto F(u(t)) \in \mathbf{B}^n$ duc spaţiul $Diff^{(m)}$ în $Diff^{(n)}$, $\widetilde{S}^{*(m)}$ în $\widetilde{S}^{*(n)}$ etc., valori iniţiale în valori iniţiale ($F(\lim\limits_{t\to\infty} u(t)) = \lim\limits_{t\to\infty} F(u(t))$) şi valori finale în valori finale.

13. Produse carteziene de funcţii şi spaţii de funcţii

DEFINITIE 17. ***Produsul cartezian*** *al funcţiilor* $x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}^n$ *şi* $x' : \mathbf{R} \to \mathbf{B}^{n'}$ *e funcţia* $x \times x' : \mathbf{R} \to \mathbf{B}^n \times \mathbf{B}^{n'}$,

$$(x \times x')(t) = (x(t), x'(t)).$$

Uneori în loc de $x \times x'$ *folosim notaţia* (x, x'). *E deseori convenabil să identificăm* $\mathbf{B}^n \times \mathbf{B}^{n'}$ *cu* $\mathbf{B}^{n+n'}$ *şi atunci putem scrie*

$$(x \times x')(t) = (x_1(t), ..., x_n(t), x_1'(t), ..., x_{n'}'(t)).$$

DEFINITIE 18. *Fie* $X \subset (\mathbf{B}^n)^{\mathbf{R}}, X' \subset (\mathbf{B}^{n'})^{\mathbf{R}}$ *două mulţimi nevide şi notăm* $(\mathbf{B}^n)^{\mathbf{R}} = \{x | x : \mathbf{R} \to \mathbf{B}^n\}$. ***Produsul*** *lor* ***cartezian*** *e definit prin*

$$X \times X' = \{x \times x' | x \in X, x' \in X'\}.$$

DEFINITIE 19. *Pentru* X, X' *ca mai înainte,* ***produsul cartezian*** $P(X) \times P(X')$ *a lui* $P(X)$ *cu* $P(X')$ *e mulţimea*

$$P(X) \times P(X') = P(X \times X')$$

şi similar pentru $P^*(X) \times P^*(X')$.

OBSERVATIE 11. *În Definiţiile 17, 18, 19 argumentul t al funcţiilor produs e acelaşi (există o unică axă a timpului şi un unic timp prezent). Concluzionăm, de exemplu, că orice $x \in Diff^{(n)}$ e produsul cartezian al coordonatelor sale*

$$x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) = (x_1 \times ... \times x_n)(t)$$

şi mai mult că

$$Diff^{(n)} \times Diff^{(n')} = Diff^{(n+n')},$$
$$P(Diff^{(n)}) \times P(Diff^{(n')}) = P(Diff^{(n+n')}).$$

Se obţin relaţii de acelaşi tip dacă înlocuim $Diff^{(n)}$ prin subspaţiile anterior definite: $\widetilde{S}^{*(n)}$, $S^{*(n)}$, $S_c^{*(n)}$, $\widetilde{S}^{(n)}$, $S^{(n)}$, $S_c^{(n)}$.

Dacă în Definiţia 17 funcţiile x, x' sunt constante şi egale cu $\mu \in \mathbf{B}^n, \mu' \in \mathbf{B}^{n'}$ atunci cele două ecuaţii devin

$$\mu \times \mu' = (\mu, \mu'),$$
$$\mu \times \mu' = (\mu_1, ..., \mu_n, \mu'_1, ..., \mu'_{n'}).$$

CAPITOLUL 3

Pseudo-sisteme

Conceptele matematice care apar în descrierea pseudo-sistemelor sunt definite cu ajutorul noţiunilor introduse în Capitolul 2. Se motivează atent utilizarea acestor concepte asociate semnalelor şi pseudo-sistemelor, anume: stările iniţiale şi stările finale, timpul iniţial şi timpul final, funcţiile stare iniţială şi stare finală.

1. Alegerea continuităţii la dreapta a semnalelor

În acest moment, în principiu, avem următoarele posibilităţi:

a) să lucrăm cu funcţii diferenţiabile $x \in Diff^{(n)}$;

b) să alegem ca de acum înainte să lucrăm cu funcţii continue la stânga $x \in \widetilde{S}^{*(n)}$, sau x aparţine unui subspaţiu al lui $\widetilde{S}^{*(n)}$;

c) să facem alegerea de a lucra în continuare cu funcţii continue la dreapta $x \in \widetilde{S}^{(n)}$, sau x aparţine unui subspaţiu al lui $\widetilde{S}^{(n)}$.

Posibilitatea a) arată a fi corectă, fiind probabil prea generală. În ecuaţiile diferenţiale şi în inecuaţiile diferenţiale pe care le folosim apar (semi-)derivate la stânga şi la dreapta aşa încât studiul soluţiilor e dificil. Convingerea noastră e că 'impulsul Dirac' $\chi_{\{d\}}$ privit ca exemplul tipic de funcţie diferenţiabilă cu discontinuităţi la stânga şi la dreapta nu reflectă proprietăţile dispozitivelor electronice care sunt inerţiale în general. Din acest motiv îl eliminăm din studiul nostru. Rămâne ca un subiect de reflexie dacă am procedat în mod rezonabil.

Alternativa b) de a restricţiona funcţiile acestei teorii la cele continue la stânga arată bine, în sensul ca ea corespunde scopurilor noastre de a simplifica analiza cât mai mult posibil. Din motive impuse de lucrările noastre precedente nu aceasta e alegerea pe care o facem, dar subiectul de meditaţie la care am ajuns e: s-ar fi putut studia tot ce apare în acesta carte cu ajutorul funcţiilor continue la stânga? Cu ce consecinţe? Noi preferăm să asociem aceste funcţii cu sistemele care au axa timpului inversată şi pentru care timpul curge dinspre viitor spre trecut.

Alternativa c), duala lui b), reprezintă decizia pe care o luăm pentru restul cărţii. Cu această restricţie, omitem utilizarea (semi-)derivatelor la dreapta, care sunt nule pentru aceste funcţii, dar şi a impulsurilor Dirac. Câştigul de simplitate pare notabil şi pierderea de generalitate pare minimă sau nulă.

2. Definiţia pseudo-sistemelor

Observatie 12. *Pseudo-sistemele sunt funcţii multivoce care asociază funcţiilor diferenţiabile continue la dreapta* $\mathbf{R} \to \mathbf{B}^m$ *numite intrări, mulţimi (vide sau nevide) de funcţii diferenţiabile continue la dreapta* $\mathbf{R} \to \mathbf{B}^n$ *numite stări. Ele iniţiază sub o formă foarte generală problema modelării circuitelor asincrone din eletronica digitală şi ne permit să prezentăm dualitatea dintre stările iniţiale şi timpul iniţial, pe de o parte, cu stările finale şi timpul final, pe de altă parte.*

DEFINITIE 20. *Funcţiile* $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$,$m, n \geq 1$ *se numesc* ***pseudo-sisteme asincrone în sens intrare-ieşire*** *sau, pe scurt,* ***pseudo-sisteme****. Spunem că* f *reprezintă un* ***pseudo-sistem sub forma explicită****. Elementele* $u \in \widetilde{S}^{(m)}$ *se numesc* ***intrări*** *(în pseudo-sistem):* ***admisibile*** *dacă* $f(u) \neq \emptyset$ *şi* ***neadmisibile*** *dacă* $f(u) = \emptyset$*, în timp ce elementele* $x \in f(u)$ *se numesc* ***stări (posibile)****, sau* ***ieşiri (posibile)*** *(din pseudo-sistem). Mulţimile* $\widetilde{S}^{(m)}, \widetilde{S}^{(n)}$ *sunt numite* ***spaţiul intrărilor*** *şi* ***spaţiul stărilor,*** *iar* m, n *sunt numite* ***dimensiunea spaţiului intrărilor*** *şi a* ***spaţiului stărilor****. Mulţimea* $\mathbf{R}$ *e* ***mulţimea timpului****.*

DEFINITIE 21. *Un* ***pseudo-sistem sub forma implicită*** *constă în una sau mai multe (in)ecuaţii în care* u *e dat,* $t \in \mathbf{R}$ *e variabila temporală şi* x *e necunoscuta.*

OBSERVATIE 13. *Pseudo-sistemele sunt funcţii multivoce (sau relaţii) care asociază fiecărei intrări* u *mulţimea stărilor posibile* $f(u)$*. Conceptul îşi are originea în modelarea circuitelor asincrone.*

O intrare neadmisibilă, i.e. o intrare u *pentru care* $f(u) = \emptyset$*, e gândită ca o cauză fără efecte exprimabile prin* f *iar o intrare admisibilă* u*, pentru care* $f(u) \neq \emptyset$*, e considerată ca fiind cauza mai multor efecte posibile* $x \in f(u)$*. Caracterul multivoc al asocierii cauză-efect e datorat fluctuaţiilor statistice în procesul de fabricaţie, variaţiilor temperaturii ambientale, variaţiilor tensiunii de alimentare etc.*

Fie $\lambda, \mu \in \mathbf{B}$*. Inegalitatea* $\lambda \leq \mu$ *e echivalentă cu egalitatea* $\overline{\lambda} \cup \mu = 1$*, iar egalitatea* $\lambda = \mu$ *e echivalentă cu inegalităţile* $\lambda \leq \mu, \mu \leq \lambda$ *(prin proprietăţi echivalente înţelegem că mulţimile de perechi* (λ, μ) *care satisfac cele două proprietăţi sunt egale). Acest fapt ne arată că e tot una daca indicăm pseudo-sistemele sub forma implicită ca ecuaţii sau ca inecuaţii.*

NOTATIE 9. *Dacă* $\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(u)$ *are exact un element, atunci pseudo-sistemul* f *se notează prin* $f : \widetilde{S}^{(m)} \to \widetilde{S}^{(n)}$*, notaţia uzuală a funcţiilor univoce.*

3. Exemple

EXEMPLU 9. *Pseudo-sistemul nul e definit prin* $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)}), \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(u) = \emptyset$*, i.e. nu există intrări admisibile. Aceasta corespunde situaţiei când* f *nu modelează nimic.*

EXEMPLU 10. *Pseudo-sistemul total* $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ *e definit prin* $\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(u) = \widetilde{S}^{(n)}$ *şi are toate intrările admisibile. El modelează toate circuitele cu intrări m-dimensionale şi stări n-dimensionale şi nu dă nici o informaţie despre aceste circuite.*

EXEMPLU 11. *Pseudo-sistemul identic* $I_m : \widetilde{S}^{(m)} \to \widetilde{S}^{(m)}$ *e definit prin:* $\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, I_m(u) = u$*. El modelează* m *fire neinerţiale şi fără întârzieri.*

EXEMPLU 12. *Proiecţia pe coordonata* j*,* $j \in \{1, ..., m\}$ *e pseudo-sistemul* $\pi_j : \widetilde{S}^{(m)} \to \widetilde{S}, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \pi_j(u) = u_j$*.*

EXEMPLU 13. *Vectorul* $\mu \in \mathbf{B}^n$ *defineşte funcţia constantă* $\mu : \widetilde{S}^{(m)} \to \widetilde{S}^{(n)}$*. Acesta e un exemplu interesant de pseudo-sistem, deoarece el sugerează modelarea unui circuit cu erori 'stuck-at'* μ_i*,* $i = \overline{1, n}$*. Am identificat constanta* μ *cu funcţia constantă* $x(t) = \mu$*.*

EXEMPLU 14. *Mai general decat înainte, o mulţime* $A \subset \mathbf{B}^n$ *defineşte pseudo-sistemul constant* $A : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$*.*

EXEMPLU 15. *Fie funcţia* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$. *Definim pseudo-sistemul* $f : \widetilde{S}^{(m)} \to \widetilde{S}^{(n)}$ *prin* $\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(u)(t) = F(u(t))$. *Acest exemplu utilizează faptul că pentru orice* $u \in \widetilde{S}^{(m)}$, *când* t *parcurge* $\mathbf{R}$, *avem că* $F(u(t))$ *aparţine lui* $\widetilde{S}^{(n)}$. *Circuitul modelat reprezintă porţile logice ideale şi, generalizând, circuitele combinaţionale ideale, care lucrează fără inerţie şi fără întârzieri.*

EXEMPLU 16. *Fie* ρ *o relaţie de echivalenţă pe* $\widetilde{S}^{(m)}$ *şi notăm prin* $[u]_\rho$ *clasa de echivalenţă a lui* u *relativă la* ρ. *Avem pseudo-sistemul* $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(m)})$ *definit de* $\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(u) = [u]_\rho$. *Iată câteva relaţii de echivalenţă pe* $\widetilde{S}^{(m)}$:

- $u\rho v \iff \exists d \in \mathbf{R}, u = v \circ \tau^d$;
- $u\rho v \iff \exists t \in \mathbf{R}, u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)}$;
- $u\rho v \iff \exists t \in \mathbf{R}, u_{|[t,\infty)} = v_{|[t,\infty)}$;
- $u\rho v \iff \exists \alpha > 0, \forall t \in \mathbf{R}, u(t) = v(\alpha \cdot t)$ *(două semnale sunt echivalente dacă ele sunt egale printr-o alegere convenabilă a celor doua unităţi de măsură a timpului);*
- $u\rho v \iff \forall j \in \{1,...,m\}, \lim\limits_{t\to-\infty} \bigcap\limits_{\xi\in(-\infty,t)} u_j(\xi) = \lim\limits_{t\to-\infty} \bigcap\limits_{\xi\in(-\infty,t)} v_j(\xi)$;
- $u\rho v \iff \forall j \in \{1,...,m\}, \lim\limits_{t\to\infty} \bigcup\limits_{\xi\in[t,\infty)} u_j(\xi) = \lim\limits_{t\to\infty} \bigcup\limits_{\xi\in[t,\infty)} v_j(\xi)$.

În scrierea ultimelor două definiţii am folosit faptul că pentru orice $u \in \widetilde{S}^{(m)}$ *şi orice* $j \in \{1,...,m\}$, *funcţiile de* t : $\bigcap\limits_{\xi\in(-\infty,t)} u_j(\xi)$, $\bigcup\limits_{\xi\in[t,\infty)} u_j(\xi)$ *comută cel mult o dată de la* 0 *la* 1 *când* t *descreşte şi respectiv de la* 1 *la* 0 *când* t *creşte. Aşadar ele sunt monotone şi cele două limite când* $t \to -\infty$ *şi respectiv* $t \to \infty$ *există.*

EXEMPLU 17. *Pseudo-sistemul* $f : \widetilde{S} \to P(\widetilde{S})$ *e definit în forma implicită de dubla inegalitate*

$$\bigcap_{\xi\in[t-d,t)} u(\xi) \le x(t) \le \bigcup_{\xi\in[t-d,t)} u(\xi), \tag{3.1}$$

unde $d > 0$. *Când* $u, x \in \widetilde{S}$, *funcţiile* $\bigcap\limits_{\xi\in[t-d,t)} u(\xi)$ *şi* $\bigcup\limits_{\xi\in[t-d,t)} u(\xi)$ *sunt doar diferenţiabile, nu şi continue la dreapta (după cum s-a arătat în Observaţia 9). Acesta e modelul unui circuit de întârziere, pentru care întârzierea dintre* u *şi* x *e mărginită de* d.

4. Stări iniţiale şi stări finale

OBSERVATIE 14. *Formulăm următoarele proprietăţi ale pseudo-sistemului* f:

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{4.1}$$

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{4.2}$$

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{4.3}$$

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \ge t_f, x(t) = \mu; \tag{4.4}$$

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \ge t_f, x(t) = \mu; \tag{4.5}$$

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \ge t_f, x(t) = \mu. \tag{4.6}$$

Se vede că dacă $f(u) \neq \emptyset$, atunci $\exists\mu$ în (4.1),...,(4.6) trebuie interpretat ca $\exists!\mu$, existenţa unui unic μ cu acea proprietate.

Dacă (4.1) are loc cu f nenulă, atunci ea defineşte o funcţie parţială $\widetilde{S}^{(n)} \to \mathbf{B}^n$ care asociază cu fiecare $x \in \bigcup_{u \in \widetilde{S}^{(m)}} f(u)$ valoarea sa iniţială μ. Dacă (4.2) e adevărată cu f nenulă, atunci ea defineşte o funcţie parţială $\widetilde{S}^{(m)} \to \mathbf{B}^n$ care asociază fiecărei intrări admisibile u valoarea comună iniţială μ a tuturor $x \in f(u)$. Dual, dacă f e nenulă şi (4.4), (4.5) sunt adevărate, atunci avem definite două funcţii parţiale $\widetilde{S}^{(n)} \to \mathbf{B}^n$ şi $\widetilde{S}^{(m)} \to \mathbf{B}^n$.

Pseudo-sistemul nul f satisface în mod trivial toate proprietăţile (4.1),...,(4.6) cu $\mu \in \mathbf{B}^n$ şi $t_0, t_f \in \mathbf{R}$ arbitrare.

Să observăm dualităţile dintre (4.1) şi (4.4); (4.2) şi (4.5); (4.3) şi (4.6) şi adevărul implicaţiilor

$$(4.3) \Longrightarrow (4.2) \Longrightarrow (4.1),$$

$$(4.6) \Longrightarrow (4.5) \Longrightarrow (4.4).$$

Să observăm de asemenea că în $(4.1), ..., (4.3)$ $\forall t < t_0$ *şi* $\forall t \leq t_0$ *sunt echivalente şi că în* $(4.4), ..., (4.6)$ $\forall t > t_f$ *şi* $\forall t \geq t_f$ *sunt echivalente. Am adoptat* $\forall t < t_0$ *şi* $\forall t \geq t_f$ *pentru a sublinia continuitatea la dreapta a* $n-$*semnalelor* $x \in \widetilde{S}^{(n)}$.

DEFINITIE 22. *Dacă f satisface (4.1), spunem că el* ***are stări iniţiale****. În acest caz vectorii μ se numesc* ***stările iniţiale*** *(ale lui f), sau mai corect* ***valorile iniţiale ale stărilor*** *(lui f).*

DEFINITIE 23. *Să presupunem că f satisface (4.2). În această situaţie spunem că el* ***are stări iniţiale fără curse*** *iar stările iniţiale μ se numesc* ***fără curse****.*

DEFINITIE 24. *Când f satisface (4.3), obişnuim să spunem că el* ***are o stare iniţială (constantă)*** *μ. În acest caz spunem că f e* ***iniţializat*** *şi că μ este* ***starea sa iniţială (constantă)****.*

DEFINITIE 25. *Dacă f satisface (4.4), el e numit* ***absolut stabil*** *şi spunem de asemenea ca el* ***are stări finale****. În acest caz vectorii μ au numele de* ***stări finale*** *(ale lui f), sau încă* ***valori finale ale stărilor*** *(lui f).*

DEFINITIE 26. *Dacă pseudo-sistemul f satisface proprietatea (4.5), el e numit* ***absolut stabil fără curse*** *şi spunem că el* ***are stări finale fără curse*** *μ. În acest caz stările finale μ sunt numite* ***fără curse****.*

DEFINITIE 27. *Presupunem că pseudo-sistemul f satisface (4.6). Atunci e numit* ***constant absolut stabil*** *sau, echivalent, spunem că el* ***are o stare finală (constantă)*** *μ. În acestă situaţie vectorul μ e numit* ***starea finală (constantă)****.*

OBSERVATIE 15. *Terminologia precedentă e legată de dualităţile iniţial-final, iniţializat-absolut stabil precum şi de ingineria hardware. În ingineria hardware, 'cursă' (în limba engleză race) înseamnă: 'care coordonată a lui x comută prima e câştigătoare' sau poate 'mai multe drumuri posibile'. În acest caz 'fără curse' înseamnă 'un singur drum posibil'. Interpretarea condiţiei de lipsă a curselor e (vag) următoarea: 'pentru orice fluctuaţii statistice în procesul de fabricaţie...', vezi Observaţia 13.*

5. Timp iniţial şi timp final

OBSERVATIE 16. *Formulăm următoarele proprietăţi ale pseudo-sistemului* $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$*:*

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u) \cap S^{(n)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{5.1}$$

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u) \cap S^{(n)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{5.2}$$

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u) \cap S^{(n)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{5.3}$$

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u) \cap S_c^{(n)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu; \tag{5.4}$$

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u) \cap S_c^{(n)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu; \tag{5.5}$$

$$\exists t_f \in \mathbf{R}, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u) \cap S_c^{(n)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu. \tag{5.6}$$

Proprietăţile (5.1) şi (5.4) sunt îndeplinite de toate pseudo-sistemele şi sunt prezentate aici doar pentru a asigura o simetrie a expunerii.

Similitudinea acestei observaţii cu Observaţia 14 e relativă. Într-adevăr, definirea unei funcţii parţiale $\widetilde{S}^{(n)} \to \mathbf{R}$*, de exemplu în cazul lui (5.1), care să asocieze numărul* $t_0 \in \mathbf{R}$ *fiecărei stări* $x \in \bigcup\limits_{u \in \widetilde{S}^{(m)}} f(u) \cap S^{(n)}$ *nu e prea naturală deoarece* t_0 *nu e unic (totuşi se poate face uz de axioma alegerii). Raţionamentul e acelaşi pentru numărul* $t_f \in \mathbf{R}$.

Dacă f *e pseudo-sistemul nul sau, mai general, dacă în una dintre (5.1),...,(5.3)* $\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}$, $f(u) \cap S^{(n)} = \emptyset$*, sau în una dintre (5.4),...,(5.6)* $\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}$, $f(u) \cap S_c^{(n)} = \emptyset$*, atunci acea proprietate e îndeplinită în mod trivial.*

Au loc dualităţile dintre (5.1) şi (5.4); (5.2) şi (5.5); (5.3) şi (5.6) şi următoarele implicaţii sunt adevărate:

$$(5.3) \Longrightarrow (5.2) \Longrightarrow (5.1);$$

$$(5.6) \Longrightarrow (5.5) \Longrightarrow (5.4).$$

O dată în plus, $\forall t < t_0$ *şi* $\forall t \leq t_0$ *sunt echivalente în* $(5.1), ..., (5.3)$*, iar* $\forall t > t_f$ *şi* $\forall t \geq t_f$ *sunt echivalente în* $(5.4), ..., (5.6)$.

DEFINITIE 28. *Dacă* f *satisface (5.1), spunem că el* ***are un timp iniţial nemărginit*** *şi orice* t_0 *satisfăcând această proprietate e numit* ***timp iniţial nemărginit****.*

DEFINITIE 29. *Fie* f *îndeplinind proprietatea (5.2). Spunem că el* ***are un timp iniţial mărginit*** *şi orice* t_0 *făcând această proprietate adevărată e numit* ***timp iniţial mărginit****.*

DEFINITIE 30. *Atunci când* f *satisface (5.3), obişnuim să spunem ca el* ***are timp iniţial fix*** *şi orice* t_0 *care apare în (5.3) e numit* ***timp iniţial fix****.*

DEFINITIE 31. *Să presupunem că* f *satisface (5.4). Atunci spunem că el* ***are un timp final nemărginit*** *şi orice* t_f *satisfăcând proprietatea e numit* ***timp final nemărginit****.*

DEFINITIE 32. *Dacă* f *îndeplineşte proprietatea (5.5), spunem că el* ***are un timp final mărginit****. Orice număr* t_f *satisfăcând (5.5) e numit* ***timp final mărginit****.*

DEFINITIE 33. *Presupunem că pseudo-sistemul f satisface proprietatea (5.6). Atunci spunem că el* ***are un timp final fix*** *şi orice număr t_f satisfăcând (5.6) e numit* ***timp final fix****.*

TEOREMĂ 25. *Dacă pseudo-sistemul f are stări iniţiale, atunci există următoarele posibilităţi neexclusive:*

a) f are stări iniţiale şi timp iniţial nemărginit dacă şi numai dacă

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

b) f are stări iniţiale şi timp iniţial mărginit dacă şi numai dacă

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

c) f are stări iniţiale şi timp iniţial fix dacă şi numai dacă

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

d) f are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial nemărginit dacă şi numai dacă

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

e) f are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial mărginit dacă şi numai dacă

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

f) f are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial fix dacă şi numai dacă

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

g) f are o stare iniţială constantă şi timp iniţial nemărginit dacă şi numai dacă

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

h) f are o stare iniţială constantă şi timp iniţial mărginit dacă şi numai dacă

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

i) f are o stare iniţială constantă şi timp iniţial fix dacă şi numai dacă

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

DEMONSTRAŢIE. e) Avem de arătat echivalenţa dintre conjuncţia lui (4.2) şi (5.2) pe de o parte şi

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu \tag{5.7}$$

pe de altă parte. Acest lucru e evident dacă f e nul. Putem presupune deci că f e nenul şi e suficient să considerăm o intrare admisibilă arbitrară $u \in \widetilde{S}^{(m)}$.

(4.2) şi (5.2) $\Longrightarrow$ (5.7).

Din (4.2) avem existenţa unui unic $\mu \in \mathbf{B}^n$ care depinde de u aşa încât $\forall x \in f(u)$, există $x(-\infty + 0)$ şi $x(-\infty + 0) = \mu$. Deci $f(u) \subset S^{(n)}$ şi $f(u) \cap S^{(n)} = f(u)$. Din (5.2) deducem că

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

unde t_0 depinde de u şi afirmaţia

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu$$

e adevărată şi ea deoarece μ şi t_0 depind doar de u. Are loc relaţia (5.7).

(5.7) $\Longrightarrow$ (4.2) şi (5.2).

(5.7) $\Longrightarrow$ (4.2) e evidentă. Pe de altă parte, pentru intrarea $u \in \widetilde{S}^{(m)}$ admisibilă şi arbitrară ca mai înainte, există un unic $\mu \in \mathbf{B}^n$ depinzând de u aşa încât

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

De aici, afirmaţia

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u) \cap S^{(n)}, \forall t < t_0, x(t) = \mu$$

e adevărată, la fel ca şi

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u) \cap S^{(n)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

i.e. are loc (5.2). $\square$

TEOREMĂ 26. *Pentru pseudo-sistemul absolut stabil f există următoarele posibilităţi neexclusive:*

a) f e absolut stabil cu timp final nemărginit dacă şi numai dacă

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

b) f e absolut stabil cu timp final mărginit dacă şi numai dacă

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

c) f e absolut stabil cu timp final fix dacă şi numai dacă

$$\exists t_f \in \mathbf{R}, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

d) f e absolut stabil fără curse şi timp final nemărginit dacă şi numai dacă

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

e) f e absolut stabil fără curse şi timp final mărginit dacă şi numai dacă

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

f) f e absolut stabil fără curse şi timp final fix dacă şi numai dacă

$$\exists t_f \in \mathbf{R}, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

g) f e constant absolut stabil şi timp final nemărginit dacă şi numai dacă

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

h) f e constant absolut stabil şi timp final mărginit dacă şi numai dacă

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

i) f e constant absolut stabil şi timp final fix dacă şi numai dacă

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, \forall x \in f(u), \forall t \geq t_f, x(t) = \mu.$$

OBSERVATIE 17. *În condiţiile Teoremelor 25 şi 26 au loc următoarele implicaţii*

$$\begin{array}{ccccc} i) & \Longrightarrow & h) & \Longrightarrow & g) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ f) & \Longrightarrow & e) & \Longrightarrow & d) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ c) & \Longrightarrow & b) & \Longrightarrow & a) \end{array}$$

6. Funcţia stare iniţială şi funcţia stare final ă

DEFINITIE 34. *Fie pseudo-sistemul* $f:\widetilde{S}^{(m)}\to P(\widetilde{S}^{(n)})$. *Dacă acesta are stări iniţiale, atunci funcţia* $\phi_0:\widetilde{S}^{(m)}\to P(\mathbf{B}^n)$ *definită de*

$$\forall u\in\widetilde{S}^{(m)},\phi_0(u)=\{x(-\infty+0)|x\in f(u)\}$$

e numită ***funcţia stare iniţială*** *a lui* f, *iar mulţimea*

$$\Theta_0=\bigcup_{u\in\widetilde{S}^{(m)}}\phi_0(u)$$

poartă numele de ***mulţimea stărilor iniţiale*** *ale lui* f.

DEFINITIE 35. *Să considerăm pseudo-sistemul* f. *Dacă el are stări finale, atunci funcţia* $\phi_f:\widetilde{S}^{(m)}\to P(\mathbf{B}^n)$ *definită de*

$$\forall u\in\widetilde{S}^{(m)},\phi_f(u)=\{x(\infty-0)|x\in f(u)\}$$

se numeşte ***funcţia stare finală*** *a lui* f, *în timp ce mulţimea*

$$\Theta_f=\bigcup_{u\in\widetilde{S}^{(m)}}\phi_f(u)$$

se numeşte ***mulţimea stărilor finale*** *ale lui* f.

EXEMPLU 18. *Funcţia constantă* $\widetilde{S}^{(m)}\to\widetilde{S}^{(n)}$ *egală cu* $\mu\in\mathbf{B}^n$ *e un pseudo-sistem cu stare iniţială constantă* μ *şi timp iniţial fix. Acest pseudo-sistem e de asemenea constant absolut stabil cu timp final fix. Funcţiile* ϕ_0,ϕ_f *şi mulţimile* Θ_0,Θ_f *există şi sunt egale cu* $\{\mu\}$.

NOTATIE 10. *Dacă* $\forall u\in\widetilde{S}^{(m)},\phi_0(u)$ *are exact un element, notaţia uzuală a funcţiei stare iniţială e* $\phi_0:\widetilde{S}^{(m)}\to\mathbf{B}^n$. *În mod similar pentru funcţia stare finală, dacă* $\forall u\in\widetilde{S}^{(m)},\phi_f(u)$ *are exact un element, folosim notaţia funcţiilor univoce* $\phi_f:\widetilde{S}^{(m)}\to\mathbf{B}^n$.

TEOREMĂ 27. *Fie* f *un pseudo-sistem cu stări iniţiale.*

a) Dacă stările sale iniţiale sunt fără curse, atunci $\forall u\in\widetilde{S}^{(m)},\phi_0(u)$ *are cel mult un element.*

b) Dacă f *are o stare iniţială constantă* μ, *atunci* $\phi_0(u)=\{\mu\}$ *e adevărată pentru orice intrare* u *admisibilă; egalitatea* $f=\emptyset$ *implică* $\Theta_0=\emptyset$ *şi dacă* $f\neq\emptyset$, *atunci avem* $\Theta_0=\{\mu\}$.

DEMONSTRAŢIE. a) Să presupunem că f are stări iniţiale fără curse şi fie $u\in\widetilde{S}^{(m)}$. Dacă $f(u)=\emptyset$, atunci $\phi_0(u)=\emptyset$ şi dacă $f(u)\neq\emptyset$, atunci există un unic $\mu\in\mathbf{B}^n$, care depinde de u, aşa incât $\forall x\in f(u),x(-\infty+0)=\mu$ şi $\phi_0(u)=\{\mu\}$.

b) Presupunem că f are o stare iniţială constantă μ. Dacă f e nulă, atunci $\forall u\in\widetilde{S}^{(m)},\phi_0(u)=\emptyset$ şi $\Theta_0=\emptyset$, în caz contrar pentru orice u admisibilă avem $\forall x\in f(u),x(-\infty+0)=\mu$ şi $\phi_0(u)=\{\mu\}$, cu alte cuvinte $\Theta_0=\{\mu\}$. □

TEOREMĂ 28. *Să luăm un pseudo-sistem* f *cu stări finale.*

a) Dacă stările sale finale sunt fără curse, atunci $\forall u\in\widetilde{S}^{(m)},\phi_f(u)$ *are cel mult un element.*

b) Dacă f *are o stare finală constantă* μ, *atunci* $\phi_f(u)=\{\mu\}$ *e adevărată pentru orice* u *admisibilă; dacă nu există intrări admisibile, atunci* $\Theta_f=\emptyset$ *şi dacă există intrări admisibile, atunci* $\Theta_f=\{\mu\}$.

CAPITOLUL 4

Sisteme

Sistemele sunt cazuri particulare de pseudo-sisteme, anume acele pseudo-sisteme nenule care satisfac proprietatea că intrările admisibile şi stările posibile au valori iniţiale. Există aici o asimetrie între atributele iniţial şi final (referitoare la stări şi timp). Ea e justificată de faptul că obişnuim să raţionăm temporal alegând un moment iniţial al timpului şi sensul crescător al axei timpului. Chiar dacă multe noţiuni caracteristice sistemelor pot fi definite şi pentru pseudo-sisteme, preferăm să le prezentăm ca legate de sisteme, deoarece sistemele sunt mai apropiate de nevoile noastre de modelare. Definim şi studiem câteva noţiuni fundamentale : subsisteme, sisteme duale, sisteme inverse, produse carteziene de sisteme, legări în serie şi în paralel a sistemelor, intersecţii, reuniuni şi morfisme de sisteme.

1. Definiţia sistemelor

DEFINITIE 36. *Dat fiind pseudo-sistemul* $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$, *mulţimea* U_f *a intrărilor admisibile definită prin*

$$U_f = \{u | u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(u) \neq \emptyset\}$$

se mai numeşte şi ***mulţimea suport****, sau* ***suportul*** *lui* f.

DEFINITIE 37. *Pseudo-sistemul (asincron)* f *e numit* ***sistem (asincron)*** *dacă*

a) $U_f \neq \emptyset$,

b) $U_f \subset S^{(m)}$,

c) $\forall u \in U_f, f(u) \subset S^{(n)}$.

NOTATIE 11. *Identificăm sistemul* f *cu funcţia* $f_1 : U \to P^*(S^{(n)})$, *unde* $U = U_f$, *definită prin* $\forall u \in U, f_1(u) = f(u)$. *Această identificare conduce spre notaţia uzuală a sistemelor date sub forma explicită i.e.* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, *unde* $U \subset S^{(m)}$ *e nevidă. Dacă* $\forall u \in U, f(u)$ *are un singur element, atunci folosim notaţia* $f : U \to S^{(n)}$ *corespunzătoare funcţiilor univoce.*

OBSERVATIE 18. *În forma implicită, sistemele constau în una sau mai multe ecuaţii sau inecuaţii cu soluţii* $x \in S^{(n)}$ *care depind de parametrul* $u \in U$. *Ţinem minte că orice* $u \in \widetilde{S}^{(m)} \setminus U$ *e fără soluţii* $x \in \widetilde{S}^{(n)}$ *şi că orice* $u \in U$ *e fără soluţii* $x \in \widetilde{S}^{(n)} \setminus S^{(n)}$.

Sistemele sunt acele pseudo-sisteme nenule f *pentru care intrările admisibile şi stările posibile au valori iniţiale (rezultând că* f *are stări iniţiale). Conceptul crează o asimetrie între stările iniţiale şi stările finale deoarece:*

- e natural să considerăm intrările ca fiind comenzi, un mod intenţionat de a acţiona asupra circuitului modelat de f *în vederea producerii unui anumit efect. Dar aceasta se face după alegerea unui moment iniţial al timpului* t_0 *de la care începând să ne putem ordona acţiunile în sensul crescător al lui* $\mathbf{R}$ *(şi nu în ambele sensuri);*

- e natural să asociem cerinţei $U \subset S^{(m)}$ (Definiţia 37 b) şi explicaţiile din paragraful precedent) o cerinţă (Definiţia 37 c)) duală stabilităţii absolute: sistemul îşi ordonează reacţiile de la un moment iniţial al timpului, în sensul crescător al axei temporale (şi nu în ambele sensuri).

Drumul de la două sensuri pe axa temporală la un sens şi existenţa momentului iniţial al timpului au fost anticipate la Observaţia 7 prin aceea că şirurile $(t_z)_{z\in\mathbf{Z}}$ compatibile cu funcţiile diferenţiabile sunt înlocuite de şiruri $(t_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

EXEMPLU 19. *Faptul că în Capitolul 3 Exemplul 17, dubla inegalitate (3.1) defineşte un sistem $S \to P^*(S)$ e evident deoarece*

$$\forall u \in S, \forall \delta \in (0,d], \bigcap_{\xi\in[t-d,t)} u(\xi) \leq u(t-\delta) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d,t)} u(\xi).$$

Având valori iniţiale, funcţia $x(t) = u(t-\delta)$ o satisface ori de câte ori $\delta \in (0,d]$. Mai mult, când u are valoarea iniţială $u(-\infty+0)$, orice soluţie x a dublei inegalităţi are valoarea iniţială $x(-\infty+0) = u(-\infty+0)$. În continuare, pentru a face exemplul corect, trebuie să cerem ca $\forall u \in \widetilde{S} \setminus S$, inegalitatea să nu aibe soluţii.

NOTATIE 12. *Fie $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ un pseudo-sistem cu proprietatea că*

$$\exists u \in S^{(m)}, f(u) \cap S^{(n)} \neq \emptyset. \tag{1.1}$$

Notăm prin $[f] : U \to P^*(S^{(n)})$ funcţia definită în felul următor

$$U = \{u | u \in S^{(m)}, f(u) \cap S^{(n)} \neq \emptyset\}, \tag{1.2}$$

$$\forall u \in U, [f](u) = f(u) \cap S^{(n)}. \tag{1.3}$$

TEOREMĂ 29. *$[f]$ e un sistem.*

DEMONSTRAŢIE. Relaţia $U \neq \emptyset$ decurge din (1.1) şi (1.2), $U \subset S^{(m)}$ e o consecinţă a lui (1.2) şi $\forall u \in U, [f](u) \subset S^{(n)}$ decurge din (1.3). Aşadar $[f]$ e un sistem. □

DEFINITIE 38. *Pentru orice pseudo-sistem f satisfăcând proprietatea (1.1), $[f]$ e numit **sistemul indus de f**.*

TEOREMĂ 30. *Pseudo-sistemul f e un sistem dacă şi numai dacă $f = [f]$.*

DEMONSTRAŢIE. $\Longleftarrow$ e evidentă, deoarece $[f]$ e un sistem.

$\Longrightarrow$ Există intrări admisibile şi fie u o astfel de intrare. Deoarece f e un sistem, u are o valoare iniţială. Din $f(u) \subset S^{(n)}$, avem că $f(u) = f(u) \cap S^{(n)} = [f](u)$ şi, datorită faptului că u a fost ales în mod arbitrar, deducem că $\forall u \in U, f(u) = [f](u)$, i.e. $f = [f]$, unde $U = U_f$. □

2. Stări iniţiale şi stări finale

TEOREMĂ 31. *Să presupunem că pseudo-sistemul $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ e un sistem şi că mulţimea sa suport e $U \in P^*(S^{(m)})$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) Capitolul 3, afirmaţia (4.1) şi

$$\forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{2.1}$$

b) Capitolul 3, afirmaţia (4.2) şi

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{2.2}$$

c) Capitolul 3, afirmaţia (4.3) şi

$$\exists\mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{2.3}$$

d) Capitolul 3, afirmaţia (4.4) şi

$$\forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists\mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu; \tag{2.4}$$

e) Capitolul 3, afirmaţia (4.5) şi

$$\forall u \in U, \exists\mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu; \tag{2.5}$$

f) Capitolul 3, afirmaţia (4.6) şi

$$\exists\mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu. \tag{2.6}$$

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $\forall u \in \widetilde{S}^{(m)} \setminus U$, afirmaţia $x \in f(u)$ e falsă, proprietatea corespunzătoere e îndeplinită în mod trivial, aşa încât singurele puncte unde adevărul lui (4.1),...,(4.6) din Capitolul 3 trebuie discutat sunt $u \in U$. □

OBSERVATIE 19. *Pentru orice sistem f, proprietatea (2.1) e adevărată.*

Teorema 31 afirmă că ne putem limita analiza sistemelor, din punctul de vedere al stărilor iniţiale şi finale, la funcţiile $U \to P^*(S^{(n)})$ după cum ne şi aşteptam.

3. Timp iniţial şi timp final

TEOREMĂ 32. *Să presupunem că pseudo-sistemul $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ are suportul $U \subset \widetilde{S}^{(m)}$. Dacă f e un sistem, atunci avem următoarele echivalenţe:*

a) Capitolul 3, afirmaţia (5.1) şi

$$\forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists\mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{3.1}$$

b) Capitolul 3, afirmaţia (5.2) şi

$$\forall u \in U, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \exists\mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{3.2}$$

c) Capitolul 3, afirmaţia (5.3) şi

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists\mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu; \tag{3.3}$$

d) Capitolul 3, afirmaţia (5.4) şi

$$\forall u \in U, \forall x \in f(u) \cap S_c^{(n)}, \exists\mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu; \tag{3.4}$$

e) Capitolul 3, afirmaţia (5.5) şi

$$\forall u \in U, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u) \cap S_c^{(n)}, \exists\mu \in \mathbf{B}^n, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu; \tag{3.5}$$

f) Capitolul 3, afirmaţia (5.6) şi

$$\exists t_f \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall x \in f(u) \cap S_c^{(n)}, \exists\mu \in \mathbf{B}^n, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu. \tag{3.6}$$

DEMONSTRAŢIE. Raţionamentul e similar cu acela din Teorema 31. În (3.1),..., (3.3) am folosit faptul că $\forall u \in U, f(u) \cap S^{(n)} = f(u)$. □

OBSERVATIE 20. *Proprietatea (3.1) coincide cu (2.1) şi e întotdeauna îndeplinită. Proprietatea (3.4) e întotdeauna satisfăcută şi ea.*

De acum înainte, vom folosi pentru sisteme afirmaţiile (2.1),..., (2.6), (3.1),..., (3.6).

4. Funcţia stare iniţială şi mulţimea stărilor iniţiale

TEOREMĂ 33. *Pentru orice sistem f, funcţia stare iniţială ϕ_0 şi mulţimea stărilor iniţiale Θ_0 există.*

DEMONSTRAŢIE. Aceasta se întâmplă pentru orice pseudo-sistem cu stări iniţiale. □

NOTATIE 13. *Identificăm funcţia stare iniţială $\phi_0 : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\mathbf{B}^n)$ cu funcţia $\phi_{10} : U \to P^*(\mathbf{B}^n)$ definită prin $\forall u \in U, \phi_{10}(u) = \phi_0(u)$ unde $U = U_f$ e mulţimea suport a lui f. Această identificare ne permite să folosim notaţia $\phi_0 : U \to P^*(\mathbf{B}^n)$ şi, când $\forall u \in U, x(-\infty + 0)$ e unică, folosim notaţia $\phi_0 : U \to \mathbf{B}^n$.*

OBSERVATIE 21. *Spre deosebire de stările iniţiale ale lui f, care există întotdeauna, stările finale pot să nu existe. Atunci când f are stări finale, funcţia stare finală $\phi_f : U \to P^*(\mathbf{B}^n)$ şi mulţimea stărilor finale Θ_f sunt şi ele definite.*

5. Subsisteme

TEOREMĂ 34. *Considerăm pseudo-sistemele $f, g : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ cu mulţimile suport U, V.*

a) Următoarele afirmaţii sunt echivalente

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(u) \subset g(u),$$
$$U \subset V \text{ si } \forall u \in U, f(u) \subset g(u).$$

b) Dacă una din afirmaţiile de la a) e adevărată, g e sistem şi $U \neq \emptyset$, atunci f e sistem.

DEMONSTRAŢIE. b) decurge din aceea că $U \neq \emptyset$, $U \subset V \subset S^{(m)}$ şi $\forall u \in U, f(u) \subset g(u) \subset S^{(n)}$. □

DEFINITIE 39. *Fie sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$. Dacă*

$$U \subset V \text{ si } \forall u \in U, f(u) \subset g(u),$$

spunem că f e un ***subsistem*** *a lui g sau că f e inclus în g şi notaţia uzuală pentru acest lucru e $f \subset g$.*

OBSERVATIE 22. *Intuitiv, faptul că f e un subsistem a lui g înseamnă că modelarea unui circuit e făcută mai precis de către f decât de către g, eventual după micşorarea mulţimii intrărilor admisibile. Relaţia $\subset$ e o relaţie de ordine parţială între sistemele $U \to P^*(S^{(n)})$, U parcurge $P^*(S^{(m)})$, unde primul element nu există şi ultimul element $S^{(n)} : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)})$ e dat de*

$$\forall u \in S^{(m)}, S^{(n)}(u) = S^{(n)}.$$

EXEMPLU 20. *Fie sistemul f şi luăm un $\mu \in \Theta_0$ arbitrar. Sistemul $f_\mu : U_\mu \to P^*(S^{(n)})$ definit de*

$$U_\mu = \{u | u \in U, \mu \in \phi_0(u)\},$$
$$\forall u \in U_\mu, f_\mu(u) = \{x | x \in f(u), x(-\infty + 0) = \mu\}$$

e un subsistem al lui f, numit ***restricţia*** *lui f la valoarea iniţială a stării (la starea) μ. Se observă că f_μ e iniţializat şi că μ e starea sa iniţială constantă.*

TEOREMĂ 35. *Fie sistemul g şi $f \subset g$ un subsistem arbitrar. Dacă g are stări iniţiale fără curse (stare iniţială constantă), atunci f are stări iniţiale fără curse (stare iniţială constantă) de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă una din proprietăţile precedente e adevărată pentru stările din $g(u)$, atunci e adevărată şi pentru stările din submulţimea $f(u) \subset g(u)$, $u \in U$. □

TEOREMĂ 36. *Fie $f \subset g$. Dacă g are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă), atunci f are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) de asemenea.*

TEOREMĂ 37. *Date fiind sistemele $f \subset g$, dacă g are timp iniţial mărginit (timp iniţial fix), atunci f are timp iniţial mărginit (timp iniţial fix).*

DEMONSTRAŢIE. Ca mai înainte, dacă una dintre proprietăţile precedente e adevărată pentru stările lui $g(u)$, atunci e adevărată şi pentru stările lui $f(u) \subset g(u), u \in U$. □

TEOREMĂ 38. *Fie f un subsistem al lui g. Dacă g are timp final mărginit (timp final fix), atunci f are timp final mărginit (timp final fix).*

TEOREMĂ 39. *Dacă $f \subset g$, atunci notăm prin $\gamma_0 : V \to P^*(\mathbf{B}^n)$ funcţia stare iniţială a lui g şi prin $\Gamma_0 \subset \mathbf{B}^n$ mulţimea stărilor iniţiale ale lui g. Avem $\forall u \in U, \phi_0(u) \subset \gamma_0(u)$ şi $\Theta_0 \subset \Gamma_0$.*

DEMONSTRAŢIE. Cum $U \subset V$ şi $\forall u \in U, f(u) \subset g(u)$, valorile iniţiale ale stărilor lui $f(u)$ sunt printre valorile iniţiale ale stărilor lui $g(u)$, $\phi_0(u) \subset \gamma_0(u)$ făcând $\Theta_0 \subset \Gamma_0$ adevărată. □

TEOREMĂ 40. *Dacă g are stări finale şi $f \subset g$, notăm prin $\gamma_f : V \to P^*(\mathbf{B}^n)$ funcţia stare finală a lui g şi prin $\Gamma_f \subset \mathbf{B}^n$ mulţimea stărilor finale ale lui g. Avem $\forall u \in U, \phi_f(u) \subset \gamma_f(u)$ şi $\Theta_f \subset \Gamma_f$.*

DEMONSTRAŢIE. Sistemul f are stări finale din Teorema 36, deci există ϕ_f şi Γ_f. Restul demonstraţiei e similar demostraţiei Teoremei 39. □

6. Sisteme duale

NOTATIE 14. *Pentru orice $u \in S^{(m)}$, notăm prin $\overline{u} \in S^{(m)}$ complementul său făcut pe coordonate*

$$\overline{u}(t) = (\overline{u_1(t)}, ..., \overline{u_m(t)}).$$

NOTATIE 15. *Dacă $U \subset S^{(m)}$ e un spaţiu de funcţii, notăm prin U^* mulţimea*

$$U^* = \{\overline{u} | u \in U\}. \tag{6.1}$$

TEOREMĂ 41. *Fie pseudo-sistemul $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ pentru care $f^* : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ e pseudo-sistemul definit în felul următor:*

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, f^*(u) = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\}.$$

Notând prin U mulţimea suport a lui f, avem că mulţimea suport a lui f^* e U^*. Dacă f e un sistem, atunci f^* e un sistem.

DEMONSTRAŢIE. Din (6.1) obţinem

$$U^* = \{\overline{u} | u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(u) \neq \emptyset\} = \{u | u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(\overline{u}) \neq \emptyset\} = \{u | u \in \widetilde{S}^{(m)}, f^*(u) \neq \emptyset\},$$

ceea ce înseamnă că U^* e mulţimea suport a pseudo-sistemului f^*. În acest moment presupunem că f e un sistem. Din $U \neq \emptyset$ deducem că $U^* \neq \emptyset$. Faptul că $\forall u \in U$, există $u(-\infty + 0)$ arată adevărul afirmaţiei $\forall u \in U^*$, există $u(-\infty + 0)$, deci

$U^* \subset S^{(m)}$. Deoarece $\forall u \in U, f(u) \subset S^{(n)}$ avem $\forall u \in U^*, f(\overline{u}) \subset S^{(n)}$, deci $\forall u \in U^*, \{\overline{x}|x \in f(\overline{u})\} \subset S^{(n)}$ şi, în cele din urmă, $\forall u \in U^*, f^*(u) \subset S^{(n)}$. f^* e un sistem. □

DEFINITIE 40. *Fie sistemul* $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$. *Sistemul* $f^* : U^* \to P^*(S^{(n)})$ *definit prin*

$$\forall u \in U^*, f^*(u) = \{\overline{x}|x \in f(\overline{u})\},$$

unde U^* *satisface (6.1), e numit* ***sistemul dual*** *al lui* f.

OBSERVATIE 23. *Adăugăm tuturor tipurilor de dualitate anterioare dualitatea dintre* $0, 1 \in \mathbf{B}$ *de care ne folosim în Definiţia 40. Dacă* f *modelează un circuit, atunci* f^* *modelează dualul acelui circuit (cu porţi logice ŞI în locul porţilor logice SAU etc.) şi are multe proprietăţi care pot fi deduse din proprietăţile lui* f.

Se vede că $\forall u \in U^*, f^*(u) = (f(\overline{u}))^*$. *Acest fapt va fi folosit în continuare.*

TEOREMĂ 42. $(f^*)^* = f$.

DEMONSTRAŢIE. $(U^*)^* = \{\overline{u}|u \in U^*\} = \{u|\overline{u} \in U^*\} = U$ şi observăm că $\forall u \in U$, $(f^*)^*(u) = \{\overline{x}|x \in f^*(\overline{u})\} = \{x|\overline{x} \in f^*(\overline{u})\} = f(u)$. □

TEOREMĂ 43. *Pentru sistemul* f, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) f *are stări iniţiale fără curse (stare iniţială constantă);*
b) f^* *are stări iniţiale fără curse (stare iniţială constantă).*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm că f are stări iniţiale fără curse $\Longleftrightarrow$ f^* are stări iniţiale fără curse:

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall \overline{x} \in f^*(\overline{u}), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall \overline{u} \in U^*, \exists \overline{\mu} \in \mathbf{B}^n, \forall \overline{x} \in f^*(\overline{u}), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, \overline{x}(t) = \overline{\mu} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall u \in U^*, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f^*(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

În afirmaţiile precedente, $\forall \overline{x} \in f^*(\overline{u})$ e notaţia pentru $\forall x, \overline{x} \in f^*(\overline{u})$, în timp ce $\exists \overline{\mu} \in \mathbf{B}^n$ e notaţia pentru $\exists \mu, \overline{\mu} \in \mathbf{B}^n$ etc. □

TEOREMĂ 44. *Pentru sistemul* f, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) f *are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă);*
b) f^* *are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă).*

TEOREMĂ 45. *Următoarele proprietăţi sunt echivalente pentru* f :
a) f *are timp iniţial mărginit (timp iniţial fix);*
b) f^* *are timp iniţial mărginit (timp iniţial fix).*

DEMONSTRAŢIE. Similar cu demonstraţia Teoremei 43, arătăm că f are timp iniţial fix $\Longleftrightarrow$ f^* are timp iniţial fix:

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall \overline{x} \in f^*(\overline{u}), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall \overline{u} \in U^*, \forall \overline{x} \in f^*(\overline{u}), \exists \overline{\mu} \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, \overline{x}(t) = \overline{\mu} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in U^*, \forall x \in f^*(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

şi $\forall \overline{x} \in f^*(\overline{u}), \forall \overline{u} \in U^*$... sunt notaţii similare cu acelea care apar în demonstraţia Teoremei 43. □

TEOREMĂ 46. *Se dă sistemul f, pentru care afirmaţiile următoare sunt echivalente:*

a) f are timp final mărginit (timp final fix);
b) f^* are timp final mărginit (timp final fix).

TEOREMĂ 47. *Să notăm prin $\phi_0^* : U^* \to P^*(\mathbf{B}^n)$ funcţia stare iniţială a lui f^* şi prin Θ_0^* mulţimea stărilor iniţiale ale lui f^*. Avem*

$$\forall u \in U^*, \phi_0^*(u) = \{\overline{\mu} | \mu \in \phi_0(\overline{u})\},$$

$$\Theta_0^* = \{\overline{\mu} | \mu \in \Theta_0\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Afirmaţiile teoremei sunt obţinute din faptul că

$$\forall u \in U^*, \phi_0^*(u) = \{x(-\infty + 0) | x \in f^*(u)\} =$$

$$= \{\overline{x(-\infty + 0)} | \overline{x} \in f^*(u)\} = \{\overline{x(-\infty + 0)} | x \in f(\overline{u})\} = \{\overline{\mu} | \mu \in \phi_0(\overline{u})\}$$

□

TEOREMĂ 48. *Dacă f are stări finale, notăm prin $\phi_f^* : U^* \to P^*(\mathbf{B}^n)$ funcţia stare finală a lui f^* şi prin Θ_f^* mulţimea stărilor finale ale lui f^*. Avem că*

$$\forall u \in U^*, \phi_f^*(u) = \{\overline{\mu} | \mu \in \phi_f(\overline{u})\},$$

$$\Theta_f^* = \{\overline{\mu} | \mu \in \Theta_f\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Folosim Teorema 44 pentru a arăta că ϕ_f^*, Θ_f^* există şi pe urmă folosim dualitatea cu Teorema 47. □

TEOREMĂ 49. *Pentru sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$ avem $f \subset g \Longleftrightarrow f^* \subset g^*$.*

DEMONSTRAŢIE. Se obţin următoarele echivalenţe:

$$f \subset g \Longleftrightarrow U \subset V \text{ si } \forall u \in U, f(u) \subset g(u) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall u \in U, u \in V \text{ si } f(u) \subset g(u) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall u \in U, u \in V \text{ si } \{x | x \in f(u)\} \subset \{x | x \in g(u)\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall u \in U, u \in V \text{ si } \{\overline{x} | x \in f(u)\} \subset \{\overline{x} | x \in g(u)\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall u \in U, u \in V \text{ si } f^*(\overline{u}) \subset g^*(\overline{u}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall \overline{u} \in U^*, \overline{u} \in V^* \text{ si } f^*(\overline{u}) \subset g^*(\overline{u}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall u \in U^*, u \in V^* \text{ si } f^*(u) \subset g^*(u) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow U^* \subset V^* \text{ si } \forall u \in U^*, f^*(u) \subset g^*(u) \Longleftrightarrow f^* \subset g^*$$

□

7. Sisteme inverse

TEOREMĂ 50. *Dat fiind pseudo-sistemul* $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$, *suportul pseudo-sistemului* $f^{-1} : \widetilde{S}^{(n)} \to P(\widetilde{S}^{(m)})$,

$$\forall x \in \widetilde{S}^{(n)}, f^{-1}(x) = \{u | u \in \widetilde{S}^{(m)}, x \in f(u)\}$$

este

$$X = \bigcup_{u \in \widetilde{S}^{(m)}} f(u).$$

Dacă f *e un sistem, atunci* f^{-1} *e un sistem de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. În mod evident, X e mulţimea suport a lui f^{-1}. Să presupunem că f e un sistem. Atunci $f \neq \emptyset$ implică $X \neq \emptyset$. Faptul că $\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(u) \subset S^{(n)}$ (în această incluziune $f(u)$ e vidă pentru unii u) arată că $X \subset S^{(n)}$. Din $\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, f(u) \neq \emptyset \Longrightarrow u \in S^{(m)}$ deducem $\forall x \in \widetilde{S}^{(n)}, f^{-1}(x) \subset S^{(m)}$ (în această incluziune $f^{-1}(x)$ e vidă pentru unii x). Toate cerinţele Definiţiei 37 sunt îndeplinite, aşa încât f^{-1} e un sistem. □

DEFINITIE 41. *Fie sistemul* $f : U \to P(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$. *Sistemul* $f^{-1} : X \to P^*(S^{(m)})$ *dat de*

$$X = \bigcup_{u \in U} f(u),$$

$$\forall x \in X, f^{-1}(x) = \{u | u \in U, x \in f(u)\}$$

se numeşte ***inversul*** *lui* f.

OBSERVATIE 24. f^{-1} *e inversul lui* f *considerat ca o relaţie* $f \subset \widetilde{S}^{(m)} \times \widetilde{S}^{(n)}$. *Ideea construcţiei sale e aceea de a inversa raportul cauză-efect:* f^{-1} *asociază fiecărui efect posibil* x *pe acele intrări admisibile* u *care puteau să-l cauzeze.*

Lucrul cu f *poate fi gândit ca referindu-se la analiza unui circuit, în timp ce lucrul cu* f^{-1} *poate fi gândit ca referindu-se la controlul unui circuit.*

În unele proprietăţi care urmează vom folosi echivalenţa $u \in f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x \in f(u)$.

TEOREMĂ 51. *Pentru sistemul* f, *avem* $(f^{-1})^{-1} = f$.

DEMONSTRAŢIE. Notăm prin U' mulţimea suport a lui $(f^{-1})^{-1}$ şi putem scrie

$$U' = \bigcup_{x \in X} f^{-1}(x) = \{u | \exists x \in X, u \in f^{-1}(x)\} =$$

$$= \{u | \exists u' \in U, \exists x \in f(u'), u \in f^{-1}(x)\} = \{u | u \in U, \exists u' \in U, \exists x \in f(u') \cap f(u)\} =$$

$$= \{u | u \in U, \exists u' \in U, f(u') \cap f(u) \neq \emptyset\} = U.$$

Aşadar suporturile lui $(f^{-1})^{-1}$ şi f coincid. Pentru orice $u \in U$ avem

$$(f^{-1})^{-1}(u) = \{x | x \in X, u \in f^{-1}(x)\} = \{x | x \in f(u)\} = f(u).$$

□

TEOREMĂ 52. *Notăm prin* $\phi_0^{-1} : X \to P^*(\mathbf{B}^m)$ *funcţia stare iniţială a lui* f^{-1} *şi prin* Θ_0^{-1} *mulţimea stărilor sale iniţiale. Următoarele afirmaţii sunt adevărate*

$$\forall x \in X, \phi_0^{-1}(x) = \{u(-\infty + 0) | u \in U, x \in f(u)\},$$

$$\Theta_0^{-1} = \{u(-\infty + 0) | u \in U\}.$$

TEOREMĂ 53. *Presupunem că f^{-1} are stări finale şi folosim notaţiile $\phi_f^{-1} : X \to P^*(\mathbf{B}^m)$, Θ_f^{-1} pentru funcţia stare finală a lui f^{-1} şi pentru mulţimea stărilor sale finale. Avem*

$$\forall x \in X, \phi_f^{-1}(x) = \{u(\infty - 0) | u \in U, x \in f(u)\},$$

$$\Theta_f^{-1} = \{u(\infty - 0) | u \in U\}.$$

TEOREMĂ 54. *Dacă $g : V \to P^*(S^{(n)}), V \in P^*(S^{(m)})$ e un sistem şi $f \subset g$, atunci au loc $f^{-1} \subset g^{-1}$ şi $(f^*)^{-1} \subset (g^*)^{-1}$.*

DEMONSTRAŢIE. Cu notaţiile $X = \bigcup_{u \in U} f(u)$, $Y = \bigcup_{u \in V} g(u)$ avem:

$$f \subset g \Longleftrightarrow (U \subset V \text{ si } \forall u \in U, f(u) \subset g(u)) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (X \subset Y \text{ si } \forall u \in U, \forall x \in X, x \in f(u) \Longrightarrow x \in g(u)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (X \subset Y \text{ si } \forall x \in X, \forall u \in U, x \in f(u) \Longrightarrow x \in g(u)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (X \subset Y \text{ si } \forall x \in X, \forall u \in U, u \in f^{-1}(x) \Longrightarrow u \in g^{-1}(x)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (X \subset Y \text{ si } \forall x \in X, f^{-1}(x) \subset g^{-1}(x)) \Longleftrightarrow f^{-1} \subset g^{-1}.$$

Pe de altă parte, $f \subset g$ implică $f^* \subset g^*$ (din Teorema 49) şi ţinând cont de punctul precedent obţinem $(f^*)^{-1} \subset (g^*)^{-1}$. □

TEOREMĂ 55. *$(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.*

DEMONSTRAŢIE. Suportul lui $(f^{-1})^*$ e X^* şi suportul lui $(f^*)^{-1}$ e

$$\bigcup_{u \in U^*} f^*(u) = \{\overline{x} | \exists u \in U^*, x \in f(\overline{u})\} = \{\overline{x} | \exists u \in U, x \in f(u)\} = X^*,$$

deci suporturile celor două sisteme coincid. Pentru toţi $x \in X^*$ obţinem că

$$(f^{-1})^*(x) = \{\overline{u} | u \in f^{-1}(\overline{x})\} = \{\overline{u} | u \in U, \overline{x} \in f(u)\} = \{\overline{u} | u \in U, x \in f^*(\overline{u})\} =$$

$$= \{u | u \in U^*, x \in f^*(u)\} = \{u | u \in (f^*)^{-1}(x)\} = (f^*)^{-1}(x).$$

□

8. Produsul cartezian

TEOREMĂ 56. *Să considerăm pseudo-sistemele $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$, $f' : \widetilde{S}^{(m')} \to P(\widetilde{S}^{(n')})$ şi să definim pseudo-sistemul $f \times f' : \widetilde{S}^{(m+m')} \to P^*(\widetilde{S}^{(n+n')})$ prin*

$$\forall u \times u' \in \widetilde{S}^{(m+m')}, (f \times f')(u \times u') = f(u) \times f'(u').$$

Atunci când U, U' sunt mulţimile suport ale lui f, f', mulţimea $U \times U'$ e suportul lui $f \times f'$. Dacă f, f' sunt sisteme, avem că $f \times f'$ e sistem.

DEMONSTRAŢIE. Evident, $U \times U'$ e mulţimea suport a lui $f \times f'$. Presupunem că f, f' sunt sisteme. Deducem că $U \neq \emptyset, U' \neq \emptyset$ ceea ce dă $U \times U' \neq \emptyset$. Mai mult, $U \subset S^{(m)}, U' \subset S^{(m')}$ implică $U \times U' \subset S^{(m)} \times S^{(m')} = S^{(m+m')}$ şi $\forall u \in U, f(u) \subset S^{(n)}$, $\forall u' \in U', f'(u') \subset S^{(n')}$ implică $\forall u \times u' \in U \times U', f(u) \times f'(u') \subset S^{(n)} \times S^{(n')} = S^{(n+n')}$. Aşadar, $f \times f'$ e un sistem. □

DEFINITIE 42. *Considerăm sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, *unde* $U \in P^*(S^{(m)})$ *şi* $U' \in P^*(S^{(m')})$. ***Produsul cartezian*** *a lui* f *cu* f' *e sistemul* $f \times f' : U \times U' \to P^*(S^{(n+n')})$ *definit în felul următor*

$$\forall u \times u' \in U \times U', (f \times f')(u \times u') = f(u) \times f'(u').$$

OBSERVATIE 25. *Produsul cartezian a două sisteme e sistemul care le reprezintă pe* f *şi* f' *acţionând independent unul de celălalt. El modelează două circuite care nu sunt interconectate.*

Fie $f : U \to P^*(S^{(n)}), f' : U' \to P^*(S^{(n')}), f'' : U'' \to P^*(S^{(n'')})$ *trei sisteme, unde* $U \in P^*(S^{(m)}), U' \in P^*(S^{(m')})$ *şi* $U'' \in P^*(S^{(m'')})$. *Asociativitatea legii '*$\times$*' poate fi gândită prin identificarea sistemelor* $(f \times f') \times f''$ *şi* $f \times (f' \times f'')$*; oricare dintre ele e notat cu* $f \times f' \times f''$. *Mulţimea suport a lui* $f \times f' \times f''$ *e notată prin* $U \times U' \times U'' \in P^*(S^{(m+m'+m'')})$, *domeniul de valori e* $P^*(S^{(n+n'+n'')})$, *intrările sale sunt notate prin* $u \times u' \times u'' \in U \times U' \times U''$ *şi stările sale sunt notate prin* $x \times x' \times x'' \in (f \times f' \times f'')(u \times u' \times u'')$.

TEOREMĂ 57. *Sistemele* f *şi* f' *au stări iniţiale fără curse (stare iniţială constantă) dacă şi numai dacă* $f \times f'$ *are stări iniţiale fără curse (stare iniţială constantă).*

DEMONSTRAŢIE. De exemplu, conjuncţia afirmaţiilor

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^{n'}, \forall u' \in U', \forall x' \in f'(u'), \exists t_0' \in \mathbf{R}, \forall t < t_0', x'(t) = \mu'$$

implică

$$\exists (\mu, \mu') \in \mathbf{B}^n \times \mathbf{B}^{n'}, \forall u \times u' \in U \times U', \forall x \times x' \in (f \times f')(u \times u'),$$
$$\exists t_0'' \in \mathbf{R}, \forall t < t_0'', (x(t), x'(t)) = (\mu, \mu'),$$

unde putem lua de fiecare dată $t_0'' = \min\{t_0, t_0'\}$.

Celelelate implicaţii sunt evidente în acest moment. □

TEOREMĂ 58. *Sistemele* f *şi* f' *au stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) dacă şi numai dacă* $f \times f'$ *are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă).*

TEOREMĂ 59. *Fie sistemele* f, f'. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) f *şi* f' *au timp iniţial mărginit (timp iniţial fix);*
b) $f \times f'$ *are timp iniţial mărginit (timp iniţial fix).*

DEMONSTRAŢIE. De exemplu, conjuncţia afirmaţiilor

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

$$\exists t_0' \in \mathbf{R}, \forall u' \in U', \forall x' \in f'(u'), \exists \mu' \in \mathbf{B}^{n'}, \forall t < t_0', x'(t) = \mu'$$

e echivalentă cu afirmaţia

$$\exists t_0'' \in \mathbf{R}, \forall u \times u' \in U \times U', \forall x \times x' \in (f \times f')(u \times u'),$$
$$\exists (\mu, \mu') \in \mathbf{B}^n \times \mathbf{B}^{n'}, \forall t < t_0'', (x(t), x'(t)) = (\mu, \mu').$$

□

TEOREMĂ 60. *Sistemele* f *şi* f' *au timp final mărginit (timp final fix) dacă şi numai dacă* $f \times f'$ *are timp final mărginit (timp final fix).*

TEOREMĂ 61. *Se dau sistemele f şi f' ca mai înainte. Notăm prin ϕ_0, ϕ'_0 funcţiile lor stare iniţială şi prin $(\phi \times \phi')_0 : U \times U' \to P^*(\mathbf{B}^{n+n'})$ funcţia stare iniţială a lui $f \times f'$. Notăm de asemenea cu $\Theta_0, \Theta_0^{'}$ mulţimile stărilor iniţiale ale lui f şi f' şi fie $(\Theta \times \Theta')_0$ mulţimea stărilor iniţiale a lui $f \times f'$. Avem*

$$\forall u \times u' \in U \times U', (\phi \times \phi')_0(u \times u') = \phi_0(u) \times \phi'_0(u),$$

$$(\Theta \times \Theta')_0 = \Theta_0 \times \Theta_0^{'}.$$

DEMONSTRAŢIE. Obţinem: $\forall u \times u' \in U \times U'$,

$$(\phi \times \phi')_0(u \times u') = \{(x(-\infty+0), x'(-\infty+0))|x \times x' \in (f \times f')(u \times u')\} =$$

$$= \{(x(-\infty+0), x'(-\infty+0))|x \times x' \in f(u) \times f'(u')\} =$$

$$= \{(x(-\infty+0), x'(-\infty+0))|x \in f(u), x' \in f'(u')\} =$$

$$= \{x(-\infty+0)|x \in f(u)\} \times \{x'(-\infty+0)|x' \in f'(u')\} = \phi_0(u) \times \phi'_0(u'),$$

$$(\Theta \times \Theta')_0 = \bigcup_{u \times u' \in U \times U'} (\phi \times \phi')_0(u \times u') = \bigcup_{u \times u' \in U \times U'} \phi_0(u) \times \phi'_0(u') =$$

$$= \bigcup_{u \in U} \phi_0(u) \times \bigcup_{u' \in U'} \phi'_0(u') = \Theta_0 \times \Theta_0^{'}.$$

□

TEOREMĂ 62. *Dacă f,f' au stări finale, notăm prin ϕ_f, ϕ'_f funcţiile lor stare finală şi prin $(\phi \times \phi')_f : U \times U' \to P^*(\mathbf{B}^{n+n'})$ funcţia stare finală a lui $f \times f'$. Notăm prin $\Theta_f, \Theta_f^{'}$ mulţimile stărilor finale a lui f şi f' şi prin $(\Theta \times \Theta')_f$ mulţimea stărilor finale a lui $f \times f'$. Avem*

$$\forall u \times u' \in U \times U', (\phi \times \phi')_f(u \times u') = \phi_f(u) \times \phi'_f(u'),$$

$$(\Theta \times \Theta')_f = \Theta_f \times \Theta_f^{'}.$$

TEOREMĂ 63. *Fie sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $g' : V' \to P^*(S^{(n')})$ cu $U, V \in P^*(S^{(m)})$ şi $U', V' \in P^*(S^{(m')})$. Avem că $f \subset g$ şi $f' \subset g'$ dacă şi numai dacă $f \times f' \subset g \times g'$.*

DEMONSTRAŢIE. Au loc următoarele echivalenţe:

$$f \subset g \text{ si } f' \subset g'$$

$$\Longleftrightarrow (U \subset V \ si\ \forall u \in U, f(u) \subset g(u)) \ si\ (U' \subset V' \ si\ \forall u' \in U', f'(u') \subset g'(u'))$$

$$\Longleftrightarrow U \subset V \ si\ U' \subset V' \ si\ \forall u \times u' \in U \times U', f(u) \subset g(u) \text{ si } f'(u') \subset g'(u')$$

$$\Longleftrightarrow U \times U' \subset V \times V' \ si\ \forall u \times u' \in U \times U', f(u) \times f'(u') \subset g(u) \times g'(u')$$

$$\Longleftrightarrow U \times U' \subset V \times V' \ si\ \forall u \times u' \in U \times U', (f \times f')(u \times u') \subset (g \times g')(u \times u')$$

$$\Longleftrightarrow f \times f' \subset g \times g'.$$

□

TEOREMĂ 64. *Pentru orice sisteme f, f' avem $(f \times f')^* = f^* \times f'^*$.*

Demonstraţie. Mai întâi de toate observăm că $(U \times U')^* = U^* \times U'^*$. În continuare, pentru toţi $u \times u' \in (U \times U')^*$, putem scrie

$$(f \times f')^*(u \times u') = \{\overline{x \times x'}|x \times x' \in (f \times f')(\overline{u \times u'})\} =$$
$$= \{\overline{x} \times \overline{x'}|x \times x' \in (f \times f')(\overline{u} \times \overline{u'})\} = \{\overline{x} \times \overline{x'}|x \times x' \in f(\overline{u}) \times f'(\overline{u'})\} =$$
$$= \{\overline{x} \times \overline{x'}|x \in f(\overline{u}), x' \in f'(\overline{u'})\} = \{\overline{x} \times \overline{x'}|\overline{x} \in f^*(u), \overline{x'} \in f'^*(u')\} =$$
$$= \{x \times x'|x \in f^*(u), x' \in f'^*(u')\} = \{x \times x'|x \times x' \in f^*(u) \times f'^*(u')\} =$$
$$= \{x \times x'|x \times x' \in (f^* \times f'^*)(u \times u')\} = (f^* \times f'^*)(u \times u').$$

□

Teoremă 65. *Fie f şi f'. Avem $(f \times f')^{-1} = f^{-1} \times f'^{-1}$.*

Demonstraţie. Notăm cu W, W' suporturile lui $(f \times f')^{-1}$, $f^{-1} \times f'^{-1}$. Avem

$$W = \bigcup_{u \times u' \in U \times U'} (f \times f')(u \times u') = \bigcup_{u \times u' \in U \times U'} f(u) \times f'(u') =$$
$$= \bigcup_{u \in U} f(u) \times \bigcup_{u' \in U'} f'(u') = W'.$$

Deci pentru orice $x \times x' \in W$, putem scrie

$$\begin{aligned}(f \times f')^{-1}(x \times x') &= \{u \times u'|u \times u' \in U \times U', x \times x' \in (f \times f')(u \times u')\} \\ &= \{u \times u'|u \times u' \in U \times U', x \times x' \in f(u) \times f'(u')\} \\ &= \{u \times u'|u \in U, u' \in U', x \in f(u), x' \in f'(u')\} \\ &= \{u \times u'|u \in f^{-1}(x), u' \in f'^{-1}(x')\} \\ &= \{u \times u'|u \times u' \in f^{-1}(x) \times f'^{-1}(x')\} \\ &= \{u \times u'|u \times u' \in (f^{-1} \times f'^{-1})(x \times x')\} \\ &= (f^{-1} \times f'^{-1})(x \times x').\end{aligned}$$

□

9. Legarea în paralel

Teoremă 66. *Se dau pseudo-sistemele $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)}), f_1' : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n')})$ şi definim $(f, f_1') : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n+n')})$ prin*

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, (f, f_1')(u) = (f \times f_1')(u \times u).$$

Dacă U, U_1' sunt mulţimile suport ale lui f, f_1' atunci suportul lui (f, f_1') este $U \cap U_1'$. Dacă f, f_1' sunt sisteme şi satisfac $U \cap U_1' \neq \emptyset$, atunci (f, f_1') este sistem.

Demonstraţie. Mulţimea $U \cap U_1'$ e în mod evident suportul lui (f, f_1'). Să presupunem că f şi f_1' sunt sisteme şi că $U \cap U_1' \neq \emptyset$. Din $U \subset S^{(m)}, U_1' \subset S^{(m)}$ deducem $U \cap U_1' \subset S^{(m)}$ şi, în plus $\forall u \in U, f(u) \subset S^{(n)}$, $\forall u \in U_1', f_1'(u) \subset S^{(n')}$ implică $\forall u \in U \cap U_1', f(u) \times f_1'(u) \subset S^{(n)} \times S^{(n')} = S^{(n+n')}$. □

Definitie 43. *Considerăm sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $f_1' : U_1' \to P^*(S^{(n')})$, $U, U_1' \in P^*(S^{(m)})$ cu $U \cap U_1' \neq \emptyset$. Sistemul $(f, f_1') : U \cap U_1' \to P^*(S^{(n+n')})$ definit de*

$$\forall u \in U \cap U_1', (f, f_1')(u) = (f \times f_1')(u \times u)$$

se numeşte ***legarea în paralel*** *a sistemelor f şi f_1'.*

OBSERVATIE 26. *Legarea în paralel a două sisteme f şi f_1' e sistemul care reprezintă pe f, f_1' acţionând independent unul de celălalt sub aceeaşi intrare. Studiul legării în paralel a sistemelor se face în termeni foarte asemănători cu studiul produsului cartezian al sistemelor din secţiunea precedentă.*

Presupunem că $f : U \to P^*(S^{(n)}), f_1' : U_1' \to P^*(S^{(n')}), f_1'' : U_1'' \to P^*(S^{(n'')})$ sunt trei sisteme unde $U, U_1', U_1'' \in P^*(S^{(m)})$. Atunci când $U \cap U_1' \cap U_1'' \neq \emptyset$, obişnuim să identificăm $((f, f_1'), f_1'')$ cu $(f, (f_1', f_1''))$ şi să notăm pe oricare dintre ele cu (f, f_1', f_1''). Mulţimea suport a lui (f, f_1', f_1'') e $U \cap U_1' \cap U_1'' \in P^*(S^{(m)})$, domeniul de valori e $P^*(S^{(n+n'+n'')})$, intrările sunt $u \in U \cap U_1' \cap U_1''$ şi stările sunt $x \times x' \times x'' \in (f, f_1', f_1'')(u)$. Aceasta e asociativitatea legii de legare in paralel a sistemelor.

10. Legarea în serie

TEOREMĂ 67. *Se dau pseudo-sistemele $f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ cu suportul $U \subset \widetilde{S}^{(m)}$ şi $h : \widetilde{S}^{(n)} \to P(\widetilde{S}^{(p)})$ cu suportul $X \subset \widetilde{S}^{(n)}$. Cerem ca $\bigcup_{u \in U} f(u) \subset X$ să aibe loc şi definim pseudo-sistemul $h \circ f : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(p)})$ în felul următor:*

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, (h \circ f)(u) = \bigcup_{x \in f(u)} h(x).$$

Avem că mulţimea suport a lui $h \circ f$ e U. Dacă f, h sunt sisteme, atunci $h \circ f$ e sistem.

DEMONSTRAŢIE. Mulţimea U e în mod evident suportul lui $h \circ f$. Presupunem că f, h sunt sisteme, deci $U \neq \emptyset$. Avem $U \subset S^{(m)}$ şi

$$\forall u \in U, (h \circ f)(u) = \bigcup_{x \in f(u)} h(x) \subset \bigcup_{x \in X} h(x) \subset S^{(p)}$$

aşadar $h \circ f$ e un sistem. □

DEFINITIE 44. *Considerăm sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ şi $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$ şi presupunem că are loc incluziunea $\bigcup_{u \in U} f(u) \subset X$. Sistemul $h \circ f : U \to P^*(S^{(p)})$ definit de*

$$\forall u \in U, (h \circ f)(u) = \bigcup_{x \in f(u)} h(x)$$

e numit ***legarea în serie*** *a sistemelor h şi f.*

OBSERVATIE 27. *Sistemul $h \circ f$ coincide cu compunerea lui h şi f, gândite ca relaţii. În situaţia când $\bigcup_{u \in U} f(u) \subset X$, interpretăm pe $h \circ f$ ca fiind acţiunea secvenţială a lui f şi h: f acţionează primul şi h al doilea, stările lui f fiind intrările lui h. În concluzie, stările posibile ale lui f devin intrări posibile ale lui h, reprezentând o anumită pierdere de precizie care apare în modelarea circuitelor mari.*

Să considerăm sistemele f, h şi $k : Z \to P^*(S^{(q)}), Z \in P^*(S^{(p)})$ aşa încât să avem $\bigcup_{u \in U} f(u) \subset X$ şi $\bigcup_{x \in X} h(x) \subset Z$. Asociativitatea legării în serie a lui k, h şi f

constă în a observa că

$$\forall u \in U, ((k \circ h) \circ f)(u) = \bigcup_{x \in f(u)} (k \circ h)(x) = \bigcup_{x \in f(u)} \bigcup_{y \in h(x)} k(y) =$$

$$= \bigcup_{y \in \bigcup\limits_{x \in f(u)} h(x)} k(y) = \bigcup_{y \in (h \circ f)(u)} k(y) = (k \circ (h \circ f))(u).$$

Pe de altă parte, dacă $1_U : U \to S^{(m)}$ *e injecţia canonică şi* $1_{S^{(n)}} : S^{(n)} \to S^{(n)}$ *e identitatea, se vede că*

$$\forall u \in U, (f \circ 1_U)(u) = \bigcup_{v = 1_U(u)} f(v) = f(u),$$

$$\forall u \in U, (1_{S^{(n)}} \circ f)(u) = \bigcup_{x \in f(u)} 1_{S^{(n)}}(x) = f(u).$$

Menţionăm şi o versiune a Definiţiei 44 pe care am folosit-o în lucrări anterioare: în loc de $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$ *cerem ca* $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \cap X \neq \emptyset$ *să aibe loc şi* $h \circ f : W \to P^*(S^{(n)})$ *e definit prin*

$$W = \{u | u \in U, f(u) \cap X \neq \emptyset\},$$

$$\forall u \in W, (h \circ f)(u) = \bigcup_{x \in f(u) \cap X} h(x).$$

TEOREMĂ 68. *Fie sistemele* f, h *aşa încât* $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$*. Dacă* h *are o stare iniţială constantă, atunci* $h \circ f$ *are o stare iniţială constantă de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Din

$$\exists \nu \in \mathbf{B}^p, \forall x \in X, \forall y \in h(x), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, y(t) = \nu$$

deducem

$$\exists \nu \in \mathbf{B}^p, \forall x \in \bigcup_{u \in U} f(u), \forall y \in h(x), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, y(t) = \nu,$$

$$\exists \nu \in \mathbf{B}^p, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \forall y \in h(x), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, y(t) = \nu,$$

$$\exists \nu \in \mathbf{B}^p, \forall u \in U, \forall y \in (h \circ f)(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, y(t) = \nu.$$

□

TEOREMĂ 69. *Dacă* h *are stări finale (stare finală constantă) şi sistemul* $h \circ f$ *e definit, atunci* $h \circ f$ *are stări finale (stare finală constantă).*

TEOREMĂ 70. *Fie sistemele* f *şi* h *cu* $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$*. Atunci când* h *are timp iniţial fix,* $h \circ f$ *are timp iniţial fix şi el.*

DEMONSTRAŢIE. Din

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in X, \forall y \in h(x), \exists \nu \in \mathbf{B}^p, \forall t < t_0, y(t) = \nu$$

obţinem

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in \bigcup_{u \in U} f(u), \forall y \in h(x), \exists \nu \in \mathbf{B}^p, \forall t < t_0, y(t) = \nu,$$

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \forall y \in h(x), \exists \nu \in \mathbf{B}^p, \forall t < t_0, y(t) = \nu,$$

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall y \in (h \circ f)(u), \exists \nu \in \mathbf{B}^p, \forall t < t_0, y(t) = \nu.$$

□

TEOREMĂ 71. *Dacă h are timp final fix şi* $\bigcup_{u\in U} f(u)\subset X$, *atunci* $h\circ f$ *are timp final fix.*

TEOREMĂ 72. *Considerăm sistemele f şi h având proprietatea că* $h\circ f$ *există. Notăm cu* η_0, δ_0 *şi* Δ_0 *funcţiile stare iniţială a lui* $h, h\circ f$ *şi mulţimea de stări iniţiale a lui* $h\circ f$. *Următoarele formule sunt adevărate:*

$$\forall u\in U, \delta_0(u)=\bigcup_{x\in f(u)}\eta_0(x),$$

$$\Delta_0=\bigcup_{u\in U}\bigcup_{x\in f(u)}\eta_0(x).$$

DEMONSTRAŢIE. Avem

$$\forall u\in U, \delta_0(u)=\{y(-\infty+0)|y\in(h\circ f)(u)\}=\{y(-\infty+0)|y\in\bigcup_{x\in f(u)}h(x)\}=$$

$$=\bigcup_{x\in f(u)}\{y(-\infty+0)|y\in h(x)\}=\bigcup_{x\in f(u)}\eta_0(x).$$

Concluzionăm că

$$\Delta_0=\bigcup_{u\in U}\delta_0(u)=\bigcup_{u\in U}\bigcup_{x\in f(u)}\eta_0(x).$$

□

TEOREMĂ 73. *Fie sistemele f şi h aşa încât* $h\circ f$ *există. Presupunem că h are stări finale şi folosim notaţiile* η_f, δ_f *şi* Δ_f *pentru funcţiile stare finală a lui* $h, h\circ f$ *şi respectiv pentru mulţimea stărilor finale a lui* $h\circ f$. *Sunt adevărate următoarele formule:*

$$\forall u\in U, \delta_f(u)=\bigcup_{x\in f(u)}\eta_f(x),$$

$$\Delta_f=\bigcup_{u\in U}\bigcup_{x\in f(u)}\eta_f(x).$$

TEOREMĂ 74. *Să considerăm sistemele* $f:U\to P^*(S^{(n)})$, $g:V\to P^*(S^{(n)})$, $U,V\in P^*(S^{(m)})$ *şi* $h:X\to P^*(S^{(p)})$, $h_1:X_1\to P^*(S^{(p)})$, $X,X_1\in P^*(S^{(n)})$. *Avem:*

a) dacă $\bigcup_{u\in V} g(u)\subset X$ *şi* $f\subset g$ *atunci* $\bigcup_{u\in U} f(u)\subset X$ *şi* $h\circ f\subset h\circ g$;

b) dacă $\bigcup_{u\in U} f(u)\subset X$ *şi* $h\subset h_1$ *atunci* $\bigcup_{u\in U} f(u)\subset X_1$ *şi* $h\circ f\subset h_1\circ f$.

DEMONSTRAŢIE. a) Ipoteza $\bigcup_{u\in V} g(u)\subset X$, $U\subset V$ şi $\forall u\in U, f(u)\subset g(u)$ arată că

$$\bigcup_{u\in U} f(u)\subset\bigcup_{u\in U} g(u)\subset\bigcup_{u\in V} g(u)\subset X$$

şi avem

$$\forall u\in U, (h\circ f)(u)=\bigcup_{x\in f(u)}h(x)\subset\bigcup_{x\in g(u)}h(x)=(h\circ g)(u).$$

b) Ipoteza afirmă că $\bigcup_{u\in U} f(u) \subset X$, $X \subset X_1$ şi $\forall x \in X, h(x) \subset h_1(x)$, de unde

$$\bigcup_{u\in U} f(u) \subset X \subset X_1,$$

$$\forall u \in U, (h \circ f)(u) = \bigcup_{x\in f(u)} h(x) \subset \bigcup_{x\in f(u)} h_1(x) = (h_1 \circ f)(u).$$

□

TEOREMĂ 75. *Fie sistemele f şi h cu $\bigcup_{u\in U} f(u) \subset X$. Avem că $(h\circ f)^*$ şi $h^* \circ f^*$ există şi $(h \circ f)^* = h^* \circ f^*$.*

DEMONSTRAŢIE. Condiţia de existenţă a sistemului $(h\circ f)^*$ coincide cu condiţia de existenţă a sistemului $h \circ f$ şi e îndeplinită. Condiţia de existenţă a lui $h^* \circ f^*$ se obţine trecând în incluziunea $\bigcup_{u\in U} f(u) \subset X$ la complementarele tuturor funcţiilor:

$$\bigcup_{u\in U^*} f^*(u) = \bigcup_{u\in U} f^*(\overline{u}) = \bigcup_{u\in U} (f(u))^* = (\bigcup_{u\in U} f(u))^* \subset X^*.$$

Sistemele $(h \circ f)^*$ şi $h^* \circ f^*$ au ambele domeniul de definiţie U^*, deci pentru orice $u \in U^*$ putem scrie că:

$$(h \circ f)^*(u) = ((h \circ f)(\overline{u}))^* = (\bigcup_{x\in f(\overline{u})} h(x))^* = \bigcup_{x\in f(\overline{u})} (h(x))^* =$$

$$= \bigcup_{x\in f(\overline{u})} h^*(\overline{x}) = \bigcup_{\overline{x}\in f^*(u)} h^*(\overline{x}) = (h^* \circ f^*)(u).$$

□

TEOREMĂ 76. *Pentru orice sistem f, sistemele $f^{-1} \circ f$ şi $f \circ f^{-1}$ au mulţimile suport U şi $X = \bigcup_{u\in U} f(u)$ şi au loc următoarele afirmaţii:*

$$\forall u \in U, (f^{-1} \circ f)(u) = \{u'|u' \in U, f(u) \cap f(u') \neq \emptyset\},$$

$$\forall x \in X, (f \circ f^{-1})(x) = \{x'|x' \in X, f^{-1}(x) \cap f^{-1}(x') \neq \emptyset\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $\bigcup_{u\in U} f(u) = X$, există $f^{-1} \circ f$ şi are domeniul U. Avem

$$\forall u \in U, (f^{-1} \circ f)(u) = \bigcup_{x\in f(u)} f^{-1}(x) = \bigcup_{x\in f(u)} \{u'|u' \in U, x \in f(u')\} =$$

$$= \{u'|u' \in U, \exists x \in f(u') \cap f(u)\} = \{u'|u' \in U, f(u') \cap f(u) \neq \emptyset\}$$

iar afirmaţia cealaltă se demonstrează în mod similar. □

TEOREMĂ 77. *Fie $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ şi $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$, aşa încât condiţia $\bigcup_{u\in U} f(u) = X$ să fie satisfăcută. Avem $(h\circ f)^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}$.*

DEMONSTRAŢIE. Notăm $Y = \bigcup_{x\in X} h(x)$. Din aceea că $\bigcup_{u\in U} f(u) = X$ deducem existenţa lui $h \circ f$, aşadar $(h \circ f)^{-1} : Y \to P^*(S^{(m)})$ există şi din $\bigcup_{y\in Y} h^{-1}(y) = X$ deducem că $f^{-1} \circ h^{-1} : Y \to P^*(S^{(m)})$ există. Se poate scrie că:

$$\forall y \in Y, (h\circ f)^{-1}(y) = \{u|u \in U, y \in (h\circ f)(u)\} = \{u|u \in U, \exists x, x \in f(u), y \in h(x)\} =$$

$$= \{u|u \in U, \exists x, x \in h^{-1}(y), u \in f^{-1}(x)\} = \bigcup_{x\in h^{-1}(y)} f^{-1}(x) = (f^{-1} \circ h^{-1})(y).$$

□

TEOREMĂ 78. *Considerăm sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$, $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$ *şi* $h' : X' \to P^*(S^{(p')})$, $X' \in P^*(S^{(n')})$. *Atunci când* $\bigcup_{u\in U} f(u) \subset X$ *şi* $\bigcup_{u'\in U'} f'(u') \subset X'$ *sunt adevărate, următoarea formulă*

$$(h \times h') \circ (f \times f') = (h \circ f) \times (h' \circ f')$$

e de asemenea adevărată.

DEMONSTRAŢIE. Ţinem cont că

$$\bigcup_{u\times u'\in U\times U'} (f\times f')(u\times u') = \bigcup_{u\times u'\in U\times U'} f(u)\times f'(u') = \bigcup_{u\in U} f(u)\times \bigcup_{u'\in U'} f'(u') \subset X\times X'$$

şi obţinem existenţa sistemului $(h \times h') \circ (f \times f')$. Dar sistemele $h \circ f$ şi $h' \circ f'$ există şi ele conform ipotezei, de unde avem existenţa lui $(h \circ f) \times (h' \circ f')$. Putem scrie că

$$\forall u \times u' \in U \times U', ((h \times h') \circ (f \times f'))(u \times u') = \bigcup_{x\times x'\in(f\times f')(u\times u')} (h \times h')(x \times x') =$$

$$= \bigcup_{x\times x'\in f(u)\times f'(u')} h(x) \times h'(x') = \bigcup_{x\in f(u)} h(x) \times \bigcup_{x'\in f'(u')} h'(x') =$$

$$= (h \circ f)(u) \times (h' \circ f')(u') = ((h \circ f) \times (h' \circ f'))(u \times u').$$

□

TEOREMĂ 79. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $f'_1 : U'_1 \to P^*(S^{(n')})$, $U'_1 \in P^*(S^{(m)})$, $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$, $h' : X' \to P^*(S^{(p')})$, $X' \in P^*(S^{(n')})$. *Să presupunem că* $U \cap U'_1 \neq \emptyset$ *şi că incluziunile următoare* $\bigcup_{u\in U\cap U'_1} f(u) \subset X$, $\bigcup_{u\in U\cap U'_1} f'_1(u) \subset X'$ *au loc. În aceste condiţii avem*

$$(h \times h') \circ (f, f'_1) = (h \circ f, h' \circ f'_1).$$

DEMONSTRAŢIE. Sistemul (f, f'_1) e definit şi are suportul $U \cap U'_1$. Sistemul $(h \times h') \circ (f, f'_1)$ e definit şi el deoarece

$$\bigcup_{u\in U\cap U'_1} (f, f'_1)(u) = \bigcup_{u\in U\cap U'_1} f(u) \times f'_1(u) = \bigcup_{u\in U\cap U'_1} f(u) \times \bigcup_{u\in U\cap U'_1} f'_1(u) \subset$$

$$\subset \bigcup_{u\in U} f(u) \times \bigcup_{u\in U'_1} f'_1(u) \subset X \times X'.$$

Sistemele $h \circ f$ şi $h' \circ f'_1$ sunt definite conform ipotezei având suporturile U şi U'_1, deci sistemul $(h \circ f, h' \circ f'_1)$ există şi el cu suportul $U \cap U'_1$ etc. □

11. Complementul, problemă deschisă

DEFINITIE 45. *Fie* $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$. *Sistemul* $Cf : W \to P^*(S^{(n)})$ *definit de*

$$W = \{u | u \in U, f(u) \neq S^{(n)}\} \cup (S^{(m)} \setminus U),$$

$$\forall u \in W, Cf(u) = \begin{cases} S^{(n)} \setminus f(u),\ u \in U \\ S^{(n)},\ u \notin U \end{cases}$$

unde $W \neq \emptyset$, *e numit* ***complementul*** *lui* f.

OBSERVATIE 28. *Intuitiv, dacă* $x \in f(u)$ *sunt stările care modelează un circuit, atunci* $x \in Cf(u)$ *sunt stările care nu modelează respectivul circuit.*

Deoarece atât naturaleţea cât şi utilitatea complementului Cf *nu ne sunt evidente în acest moment, îl lăsăm ca problemă deschisă.*

12. Intersecţia

TEOREMĂ 80. *Să considerăm pseudo-sistemele* $f, g : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ *pentru care definim pseudo-sistemul* $f \cap g : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ *prin*

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, (f \cap g)(u) = f(u) \cap g(u).$$

Notăm cu U *şi* V *suporturile lui* f *şi* g. *Avem că suportul lui* $f \cap g$ *este*

$$W = \{u | u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}. \tag{12.1}$$

Dacă f *şi* g *sunt sisteme şi* $\exists u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, *atunci* $f \cap g$ *este sistem.*

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că f, g sunt sisteme şi $W \neq \emptyset$. Din $W \subset U \subset S^{(m)}$ şi $\forall u \in W, (f \cap g)(u) = f(u) \cap g(u) \subset f(u) \subset S^{(n)}$ deducem că $f \cap g$ e sistem. □

DEFINITIE 46. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$ *cu* $U, V \in P^*(S^{(m)})$. *Dacă* $\exists u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, *sistemul* $f \cap g : W \to P^*(S^{(n)})$ *definit de*

$$\forall u \in W, (f \cap g)(u) = f(u) \cap g(u),$$

unde W *e cel din (12.1), se numeşte* ***intersecţia*** *lui* f *şi* g.

OBSERVATIE 29. *Intersecţia pseudo-sistemelor reprezintă câştigul de informaţie (de precizie) în modelarea unui circuit care decurge din utilizarea simultană a două modele (compatibile!).*

În situaţia particulară când sistemul g *e funcţia constantă:* $g : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)})$, $\forall u \in S^{(m)}$, $g(u) = X$, *unde* $X \subset S^{(n)}$ *e un spaţiu de funcţii, sistemul* $f \cap X : W \to P^*(S^{(n)})$ *e dat de*

$$W = \{u | u \in U, f(u) \cap X \neq \emptyset\},$$

$$\forall u \in W, (f \cap X)(u) = f(u) \cap X.$$

Interpretăm pe $f \cap X$ *în felul următor: când* f *modelează un circuit,* $f \cap X$ *reprezintă acel câştig de informaţie care decurge din afirmarea unei cerinţe suplimetare independente de* u.

EXEMPLU 21. *Dăm câteva posibilităţi de a alege în intersecţia $f \cap g$, pe g constant (egal cu X):*

a) valoarea iniţială a stărilor e vectorul nul;

b) coordonatele stării $x_1, ..., x_n$ sunt monotone;

c) la fiecare moment de timp, cel puţin o funcţie coordonată să fie 1:

$$X = \{x|x \in S^{(n)}, x_1(t) \cup ... \cup x_n(t) = 1\};$$

d) stării i se permite să comute cu cel mult o coordonată o dată:

$$X = \{x|x \in S^{(n)}, \forall t, x(t-0) \neq x(t) \Longrightarrow \exists! i \in \{1, ..., n\}, Dx_i(t) = 1\};$$

e) X reprezintă o eroare 'stuck at 1':

$$\exists i \in \{1, ..., n\}, X = \{x|x \in S^{(n)}, x_i(t) = 1\}.$$

Această ultimă alegere a lui X e interesantă în proiectarea sistemelor pentru testabilitate, respectiv în proiectarea sistemelor redundante.

TEOREMĂ 81. *Fie sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$ şi $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$. Dacă $\exists u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$ şi f are stări iniţiale fără curse (stare iniţială constantă), atunci $f \cap g$ are stări iniţiale fără curse (stare iniţială constantă).*

DEMONSTRAŢIE. $f \cap g \subset f$ şi afirmaţia teoremei e o consecinţă a Teoremei 35. □

TEOREMĂ 82. *Dacă f are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) şi $f \cap g$ există, atunci $f \cap g$ are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă).*

TEOREMĂ 83. *Dacă f are timp iniţial mărginit (timp iniţial fix) şi intersecţia $f \cap g$ există, atunci $f \cap g$ are timp iniţial mărginit (timp iniţial fix).*

DEMONSTRAŢIE. $f \cap g \subset f$ şi rezultatele decurg din Teorema 37. □

TEOREMĂ 84. *Dacă f are timp final mărginit (timp final fix) şi există $f \cap g$, atunci $f \cap g$ are timp final mărginit (timp final fix).*

TEOREMĂ 85. *Fie sistemele f, g. Avem $(\phi \cap \gamma)_0 : W \to P^*(\mathbf{B}^n)$,*

$$\forall u \in W, (\phi \cap \gamma)_0(u) = \phi_0(u) \cap \gamma_0(u),$$

$$(\Theta \cap \Gamma)_0 = \bigcup_{u \in W} (\phi \cap \gamma)_0(u).$$

Am presupus că domeniul de definiţie W al lui $f \cap g$ e nevid şi am notat cu $\phi_0, \gamma_0, (\phi \cap \gamma)_0$ funcţiile stare iniţială a lui $f, g, f \cap g$ şi cu $(\Theta \cap \Gamma)_0$ mulţimea stărilor iniţiale a lui $f \cap g$.

DEMONSTRAŢIE. Putem scrie că $\forall u \in W$,

$$(\phi \cap \gamma)_0(u) = \{x(-\infty + 0)|x \in (f \cap g)(u)\} = \{x(-\infty + 0)|x \in f(u) \cap g(u)\} =$$

$$= \{x(-\infty + 0)|x \in f(u)\} \cap \{x(-\infty + 0)|x \in g(u)\} = \phi_0(u) \cap \gamma_0(u).$$

□

TEOREMĂ 86. *Dacă f, g au stări finale, atunci avem $(\phi \cap \gamma)_f : W \to P^*(\mathbf{B}^n)$,*

$$\forall u \in W, (\phi \cap \gamma)_f(u) = \phi_f(u) \cap \gamma_f(u),$$

$$(\Theta \cap \Gamma)_f = \bigcup_{u \in W} (\phi \cap \gamma)_f(u).$$

Am presupus că $W \neq \emptyset$ şi notaţiile sunt evidente şi similare cu acelea din teorema precedentă.

TEOREMĂ 87. *Fie sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $f_1 : U_1 \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$ cu $U, U_1, V \in P^*(S^{(m)})$. Dacă $f \subset f_1$ şi dacă $f \cap g$ există, atunci $f_1 \cap g$ există şi are loc incluziunea $f \cap g \subset f_1 \cap g$.*

DEMONSTRAŢIE. Notăm cu W mulţimea din (12.1) şi cu W_1 mulţimea

$$W_1 = \{u | u \in U_1 \cap V, f_1(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}.$$

Din faptul că $U \subset U_1, \forall u \in U, f(u) \subset f_1(u)$ şi $W \neq \emptyset$, deducem $W \subset W_1, W_1 \neq \emptyset$ şi, mai departe, avem $\forall u \in W, (f \cap g)(u) = f(u) \cap g(u) \subset f_1(u) \cap g(u) = (f_1 \cap g)(u)$. $\square$

TEOREMĂ 88. *Dacă există $f \cap g$, atunci există $(f \cap g)^*$, $f^* \cap g^*$ şi*

$$(f \cap g)^* = f^* \cap g^*.$$

DEMONSTRAŢIE. Notăm cu W domeniul de definiţie (12.1) al lui $f \cap g$. Domeniul de definiţie al lui $(f \cap g)^*$ e W^* şi domeniul de definiţie W_1 al lui $f^* \cap g^*$ e

$$\begin{aligned} W_1 = \{u | u \in U^* \cap V^*, f^*(u) \cap g^*(u) \neq \emptyset\} = \\ = \{u | \overline{u} \in U \cap V, \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} \cap \{\overline{x} | x \in g(\overline{u})\} \neq \emptyset\} = \\ = \{\overline{u} | u \in U \cap V, \{\overline{x} | x \in f(u)\} \cap \{\overline{x} | x \in g(u)\} \neq \emptyset\} = \\ = \{\overline{u} | u \in U \cap V, \{x | x \in f(u)\} \cap \{x | x \in g(u)\} \neq \emptyset\} = W^*. \end{aligned}$$

Mai departe, pentru orice $u \in W^*$, deducem

$$\begin{aligned} (f \cap g)^*(u) = \{\overline{x} | x \in (f \cap g)(\overline{u})\} = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u}) \cap g(\overline{u})\} = \\ = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} \cap \{\overline{x} | x \in g(\overline{u})\} = f^*(u) \cap g^*(u) = (f^* \cap g^*)(u). \end{aligned}$$

$\square$

TEOREMĂ 89. *Fie sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)}), g : V \to P^*(S^{(n)}), U, V \in P^*(S^{(m)})$. Dacă $\exists u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, atunci există sistemele $(f \cap g)^{-1}$, $f^{-1} \cap g^{-1}$ a căror mulţime suport comună e*

$$X = \bigcup_{u \in U \cap V} (f(u) \cap g(u)).$$

Mai departe, avem

$$(f \cap g)^{-1} = f^{-1} \cap g^{-1}.$$

DEMONSTRAŢIE. În mod evident X e mulţimea suport a lui $(f \cap g)^{-1}$. Putem scrie

$$\begin{aligned} X = \bigcup_{u \in U \cap V} (f(u) \cap g(u)) = \{x | \exists u \in U \cap V, x \in f(u) \cap g(u)\} = \\ = \{x | x \in \bigcup_{v \in U} f(v) \cap \bigcup_{v \in V} g(v), \exists u \in U \cap V, u \in f^{-1}(x) \text{ si } u \in g^{-1}(x)\} = \\ = \{x | x \in \bigcup_{v \in U} f(v) \cap \bigcup_{v \in V} g(v), f^{-1}(x) \cap g^{-1}(x) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Aşadar X e suportul lui $f^{-1} \cap g^{-1}$ de asemenea. Obţinem $\forall x \in X$ că

$$(f \cap g)^{-1}(x) = \{u|u \in U \cap V, x \in (f \cap g)(u)\} = \{u|u \in U \cap V, x \in f(u) \cap g(u)\} =$$
$$= \{u|u \in U \cap V, x \in f(u)\} \cap \{u|u \in U \cap V, x \in g(u)\} =$$
$$= \{u|u \in U, x \in f(u)\} \cap \{u|u \in V, x \in g(u)\} = f^{-1}(x) \cap g^{-1}(x) = (f^{-1} \cap g^{-1})(x).$$

□

TEOREMĂ 90. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$ *şi* $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$. *Dacă* $\exists u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, *atunci sunt definite sistemele* $(f \cap g) \times f', (f \times f') \cap (g \times f')$ *care au aceeaşi mulţime suport* $W \times U'$ *unde am pus*

$$W = \{u|u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}.$$

Avem egalitatea

$$(f \cap g) \times f' = (f \times f') \cap (g \times f').$$

DEMONSTRAŢIE. Arătăm că $W \times U'$, mulţimea suport a lui $(f \cap g) \times f'$, e şi mulţimea suport a lui $(f \times f') \cap (g \times f')$:

$$\{u \times u'|u \times u' \in (U \times U') \cap (V \times U'), (f \times f')(u \times u') \cap (g \times f')(u \times u') \neq \emptyset\} =$$
$$= \{u \times u'|u \times u' \in (U \cap V) \times U', (f(u) \times f'(u')) \cap (g(u) \times f'(u')) \neq \emptyset\} =$$
$$= \{u \times u'|u \in U \cap V, u' \in U', f(u) \cap g(u) \neq \emptyset \text{ si } f'(u') \neq \emptyset\} =$$
$$= \{u \times u'|u \in W, u' \in U'\} = W \times U'.$$

În continuare, pentru orice $u \times u' \in W \times U'$, se obţine

$$((f \cap g) \times f')(u \times u') = (f \cap g)(u) \times f'(u') = (f(u) \cap g(u)) \times f'(u') =$$
$$= (f(u) \times f'(u')) \cap (g(u) \times f'(u')) = (f \times f')(u \times u') \cap (g \times f')(u \times u') =$$
$$= ((f \times f') \cap (g \times f'))(u \times u').$$

□

TEOREMĂ 91. *Considerăm sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $f'_1 : U'_1 \to P^*(S^{(n')})$, *cu* $U, V, U'_1 \in P^*(S^{(m)})$. *Presupunem că* $\exists u \in U \cap V \cap U'_1$, *aşa încât* $f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$. *Atunci mulţimea*

$$W' = \{u|u \in U \cap V \cap U'_1, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}$$

e suportul nevid al sistemelor $(f \cap g, f'_1)$, $(f, f'_1) \cap (g, f'_1)$ *şi următoarea egalitate*

$$(f \cap g, f'_1) = (f, f'_1) \cap (g, f'_1)$$

e adevărată.

DEMONSTRAŢIE. Mulţimea W' e suportul lui $(f \cap g, f'_1)$ şi ştim despre ea că e şi suportul lui $(f, f'_1) \cap (g, f'_1)$. Notăm prin

$$W'' = \{u|u \in (U \cap U'_1) \cap (V \cap U'_1), (f, f'_1)(u) \cap (g, f'_1)(u) \neq \emptyset\}$$

mulţimea suport a lui $(f, f'_1) \cap (g, f'_1)$, pentru care avem

$$W'' = \{u|u \in U \cap V \cap U'_1, (f(u) \times f'_1(u)) \cap (g(u) \times f'_1(u)) \neq \emptyset\} =$$
$$= \{u|u \in U \cap V \cap U'_1, (f(u) \cap g(u)) \times f'_1(u) \neq \emptyset\} =$$
$$= \{u|u \in U \cap V \cap U'_1, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}.$$

Aşadar $W'' = W'$. Pentru orice $u \in W'$ se vede că

$$(f \cap g, f'_1)(u) = ((f \cap g) \times f'_1)(u \times u) = (f \cap g)(u) \times f'_1(u) = (f(u) \cap g(u)) \times f'_1(u) =$$

$$= (f(u) \times f_1'(u)) \cap (g(u) \times f_1'(u)) = ((f \times f_1')(u \times u)) \cap ((g \times f_1')(u \times u)) =$$
$$= (f, f_1')(u) \cap (g, f_1')(u) = ((f, f_1') \cap (g, f_1'))(u).$$

□

OBSERVATIE 30. *Un rezultat similar cu acela al Teoremei 90 afirmă adevărul formulei*

$$f \times (f' \cap g') = (f \times f') \cap (f \times g')$$

şi atunci, din Teorema 90, obţinem următorul rezultat

$$(f \cap g) \times (f' \cap g') = (f \times f') \cap (f \times g') \cap (g \times f') \cap (g \times g').$$

Ca în Teorema 91, putem demonstra că

$$(f, f_1' \cap g_1') = (f, f_1') \cap (f, g_1')$$

e adevărată şi atunci, din Teorema 91, se obţine

$$(f \cap g, f_1' \cap g_1') = (f, f_1') \cap (f, g_1') \cap (g, f_1') \cap (g, g_1').$$

TEOREMĂ 92. *Se dau sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$ şi $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $h_1 : X_1 \to P^*(S^{(p)})$, $X, X_1 \in P^*(S^{(n)})$.*

a) Dacă $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$, $\bigcup\limits_{u \in V} g(u) \subset X$ şi mulţimea

$$W = \{u | u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}$$

e nevidă, atunci există sistemele $h \circ (f \cap g)$, $(h \circ f) \cap (h \circ g)$ şi avem

$$h \circ (f \cap g) \subset (h \circ f) \cap (h \circ g).$$

b) Cerem ca următoarea incluziune $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset \{x | x \in X \cap X_1, h(x) \cap h_1(x) \neq \emptyset\}$ să fie adevărată. Atunci sunt definite sistemele $(h \cap h_1) \circ f$, $(h \circ f) \cap (h_1 \circ f)$ şi incluziunea

$$(h \cap h_1) \circ f \subset (h \circ f) \cap (h_1 \circ f)$$

e adevărată.

DEMONSTRAŢIE. a) Vom folosi în cele ce urmează faptul că $\forall u \in U \cap V$, avem

$$\bigcup_{x \in f(u) \cap g(u)} h(x) \subset \bigcup_{x \in f(u)} h(x), \quad \bigcup_{x \in f(u) \cap g(u)} h(x) \subset \bigcup_{x \in g(u)} h(x),$$

(în partea stângă a incluziunilor putem avea $\emptyset$), de unde

$$\bigcup_{x \in f(u) \cap g(u)} h(x) \subset \bigcup_{x \in f(u)} h(x) \cap \bigcup_{x \in g(u)} h(x).$$

Arătăm existenţa lui $h \circ (f \cap g)$:

$$\bigcup_{u \in W} (f \cap g)(u) = \bigcup_{u \in W} (f(u) \cap g(u)) \subset \bigcup_{u \in W} (f(u) \cup g(u)) =$$
$$= \bigcup_{u \in W} f(u) \cup \bigcup_{u \in W} g(u) \subset \bigcup_{u \in U} f(u) \cup \bigcup_{u \in V} g(u) \subset X.$$

Arătăm existenţa lui $(h \circ f) \cap (h \circ g)$ şi să notăm cu W' suportul său. Deoarece

$$W = \{u | u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\} = \{u | u \in U \cap V, \bigcup_{x \in f(u) \cap g(u)} h(x) \neq \emptyset\} \subset$$

$$\subset \{u|u \in U \cap V, \bigcup_{x\in f(u)} h(x) \cap \bigcup_{x\in g(u)} h(x) \neq \emptyset\} =$$

$$= \{u|u \in U \cap V, (h \circ f)(u) \cap (h \circ g)(u) \neq \emptyset\} = W'$$

se vede că W e nevidă implică W' e nevidă, deci există $(h \circ f) \cap (h \circ g)$.

Concluzionăm că $\forall u \in W$,

$$(h \circ (f \cap g))(u) = \bigcup_{x\in f(u)\cap g(u)} h(x) \subset \bigcup_{x\in f(u)} h(x) \cap \bigcup_{x\in g(u)} h(x) =$$

$$= (h \circ f)(u) \cap (h \circ g)(u) = ((h \circ f) \cap (h \circ g))(u).$$

b) Deoarece

$$\bigcup_{u\in U} f(u) \subset \{x|x \in X \cap X_1, h(x) \cap h_1(x) \neq \emptyset\} \subset X,$$

$$\bigcup_{u\in U} f(u) \subset \{x|x \in X \cap X_1, h(x) \cap h_1(x) \neq \emptyset\} \subset X_1$$

obţinem existenţa lui $h \circ f$ şi $h_1 \circ f$.

Vom folosi în continuare faptul că $\forall u \in U$, din

$$\bigcup_{x\in f(u)} (h \cap h_1)(x) \subset \bigcup_{x\in f(u)} h(x), \bigcup_{x\in f(u)} (h \cap h_1)(x) \subset \bigcup_{x\in f(u)} h_1(x)$$

(în partea stângă a incluziunilor putem avea $\emptyset$) deducem

$$\bigcup_{x\in f(u)} (h \cap h_1)(x) \subset \bigcup_{x\in f(u)} h(x) \cap \bigcup_{x\in f(u)} h_1(x).$$

Mulţimea $\{x|x \in X \cap X_1, h(x) \cap h_1(x) \neq \emptyset\}$ e nevidă şi reprezintă suportul lui $h \cap h_1$, deci ipoteza a implicat existenţa lui $(h \cap h_1) \circ f$. Mai departe:

$$\forall u \in U, ((h\circ f)\cap(h_1 \circ f))(u) = (h\circ f)(u)\cap(h_1\circ f)(u) = \bigcup_{x\in f(u)} h(x)\cap \bigcup_{x\in f(u)} h_1(x) \supset$$

$$\supset \bigcup_{x\in f(u)} (h(x) \cap h_1(x)) \neq \emptyset$$

din ipoteză, ceea ce înseamnă că suportul lui $(h \circ f) \cap (h_1 \circ f)$ e U.

În cele din urmă, obţinem: $\forall u \in U$,

$$((h \cap h_1) \circ f)(u) = \bigcup_{x\in f(u)} (h \cap h_1)(x) \subset$$

$$\subset \bigcup_{x\in f(u)} h(x) \cap \bigcup_{x\in f(u)} h_1(x) = (h \circ f)(u) \cap (h_1 \circ f)(u) = ((h \circ f) \cap (h_1 \circ f))(u).$$

$\square$

13. Reuniunea

TEOREMĂ 93. *Fie pseudo-sistemele* $f, g : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ *pentru care definim pseudo-sistemul* $f \cup g : \widetilde{S}^{(m)} \to P(\widetilde{S}^{(n)})$ *în felul următor*

$$\forall u \in \widetilde{S}^{(m)}, (f \cup g)(u) = f(u) \cup g(u).$$

Pentru U, V *suporturile lui* f, g, *avem că suportul lui* $f \cup g$ *e* $U \cup V$. *Dacă* f, g *sunt sisteme, atunci* $f \cup g$ *e sistem.*

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că f, g sunt sisteme. Avem $U \neq \emptyset \Longrightarrow U \cup V \neq \emptyset$; $U \subset S^{(m)}$ şi $V \subset S^{(m)}$ implică $U \cup V \subset S^{(m)}$; $\forall u \in U, f(u) \subset S^{(n)}, \forall v \in V, g(v) \subset S^{(n)}$ implică

$$\forall u \in U \cup V, (f \cup g)(u) = \begin{cases} f(u), \text{dacă } u \in U \setminus V \\ g(u), \text{dacă } u \in V \setminus U \\ f(u) \cup g(u), \text{dacă } u \in U \cap V \end{cases} \subset S^{(n)}.$$

Deci $f \cup g$ e un sistem. □

DEFINITIE 47. ***Reuniunea*** *sistemelor* f *şi* g *e sistemul* $f \cup g : U \cup V \to P^*(S^{(n)})$ *definit de*

$$\forall u \in U \cup V, (f \cup g)(u) = \begin{cases} f(u), \text{dacă } u \in U \setminus V \\ g(u), \text{dacă } u \in V \setminus U \\ f(u) \cup g(u), \text{dacă } u \in U \cap V \end{cases}.$$

Dacă $U \cap V = \emptyset$, *atunci* $f \cup g$ *se numeşte* ***reuniunea disjunctă*** *a lui* f *şi* g.

OBSERVATIE 31. *Reuniunea sistemelor e conceptul dual celui de intersecţie. Ea reprezintă pierderea de informaţie (de precizie) care decurge în general din validitatea unuia din două modele. Totuşi, reuniunea disjunctă nu înseamnă pierdere de informaţie.*

Avem şi cazul particular când în reuniunea $f \cup g$ *sistemul* g *e constant, adică* $g : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)})$, $\forall u \in S^{(m)}$, $g(u) = X$, *cu* $X \subset S^{(n)}$. *În această situaţie* $f \cup X : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)})$ *e definită prin*

$$\forall u \in S^{(m)}, (f \cup X)(u) = \begin{cases} X, \text{dacă } u \in S^{(m)} \setminus U \\ f(u) \cup X, \text{dacă } u \in U \end{cases}.$$

Interpretarea lui $f \cup X$ *este: când* f *e modelul unui circuit asincron,* X *reprezintă perturbaţii independente de* u.

EXEMPLU 22. *Fie sistemul* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$. *Dacă* $\Theta_0 = \{\mu^1, ..., \mu^k\} \subset \mathbf{B}^n$, *atunci* $f_{\mu^1} : U_{\mu^1} \to P^*(S^{(n)}), ..., f_{\mu^k} : U_{\mu^k} \to P^*(S^{(n)})$ *sunt restricţiile lui* f *la valorile iniţiale ale stărilor* $\mu^1, ..., \mu^k$ *(vezi Exemplul 20). Avem* $f = f_{\mu^1} \cup ... \cup f_{\mu^k}$.

EXEMPLU 23. *În reuniunea* $f \cup g$ *presupunem că* $U \cap V \neq \emptyset$ *şi că* f, g *modelează două circuite diferite, primul considerat 'bun, fără erori' şi cel de-al doilea 'rău, cu erori' (sau 'rău, cu o anumită eroare').* ***Problema de testare*** *constă în găsirea unei intrări* $u \in U \cap V$ *aşa încât* $f(u) \cap g(u) = \emptyset$; *după aplicarea sa lui* $f \cup g$ *şi măsurarea stării* $x \in (f \cup g)(u)$, *putem spune dacă* $x \in f(u)$ *şi circuitul testat e 'bun' sau poate* $x \in g(u)$ *şi circuitul testat e 'rău'.*

TEOREMĂ 94. *a) Dacă f, g au stări iniţiale fără curse şi $\forall u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, atunci $f \cup g$ are stări iniţiale fără curse.*

b) Dacă f, g au stări iniţiale constante şi $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \cap \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \neq \emptyset$, atunci $f \cup g$ are stare iniţială constantă.

DEMONSTRAŢIE. a) Ipoteza afirmă adevărul următoarelor proprietăţi

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

$$\forall u \in V, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in g(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

$$\forall u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset.$$

Dacă $(U \setminus V) \cup (V \setminus U) \neq \emptyset$, atunci $\forall u \in (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$ afirmaţia e adevărată deoarece afirmă separat pentru f şi g că ele au stări iniţiale fără curse. Dacă $U \cap V \neq \emptyset$, atunci deducem că μ către care converg $x \in f(u) \cup g(u)$ pentru $u \in U \cap V$ atunci când $t \to -\infty$ depinde doar de u, nu şi de faptul că $x \in f(u)$ sau $x \in g(u)$. Avem că

$$\forall u \in U \cup V, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in (f \cup g)(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu$$

e adevărată.

b) Deoarece $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \cap \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \neq \emptyset$, în afirmaţiile

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall u \in V, \forall x \in g(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu'$$

cei doi vectori μ şi μ', a căror existenţă e unică, coincid. $\square$

TEOREMĂ 95. *a) Dacă f, g au stări finale, atunci $f \cup g$ are stări finale.*

b) Dacă f, g au stări finale fără curse şi $\forall u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, atunci $f \cup g$ are stări finale fără curse.

c) Dacă f, g au stări finale constante şi $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \cap \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \neq \emptyset$, atunci $f \cup g$ are stare finală constantă.

TEOREMĂ 96. *Dacă f, g au timp iniţial mărginit (timp iniţial fix), atunci $f \cup g$ are timp iniţial mărginit (timp iniţial fix).*

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că f, g au timp iniţial mărginit şi fie $u \in U \cup V$ arbitrar. Atunci există $t_0', t_0'' \in \mathbf{R}$, depinzând de u, aşa încât

$$\forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0', x(t) = \mu,$$

$$\forall x \in g(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0'', x(t) = \mu$$

unde, dacă în una dintre afirmaţiile precedente $f(u) = \emptyset$ sau $g(u) = \emptyset, t_0'$ şi t_0'' pot fi alese în mod arbitrar. Timpul $t_0 = \min\{t_0', t_0''\}$ satisface relaţia

$$\forall x \in f(u) \cup g(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

$\square$

TEOREMĂ 97. *Dacă f, g au timp final mărginit (timp final fix), atunci $f \cup g$ are timp final mărginit (timp final fix).*

TEOREMĂ 98. *Pentru sistemele f, g, avem* $(\phi \cup \gamma)_0 : U \cup V \to P^*(\mathbf{B}^n)$,

$$\forall u \in U \cup V, (\phi \cup \gamma)_0(u) = \begin{cases} \phi_0(u),\ u \in U \setminus V \\ \gamma_0(u),\ u \in V \setminus U \\ \phi_0(u) \cup \gamma_0(u),\ u \in U \cap V \end{cases},$$

$$(\Theta \cup \Gamma)_0 = \bigcup_{u \in U \cup V} (\phi \cup \gamma)_0(u).$$

Am notat cu $\phi_0, \gamma_0, (\phi \cup \gamma)_0$ *funcţiile stare iniţială ale lui* $f, g, f \cup g$ *şi cu* $(\Theta \cup \Gamma)_0$ *mulţimea stărilor iniţiale ale lui* $f \cup g$.

DEMONSTRAŢIE. Avem trei posibilităţi pentru un $u \in U \cup V$ arbitrar: $u \in U \setminus V, u \in V \setminus U$ şi $u \in U \cap V$. Dacă, de exemplu, $u \in U \setminus V$, atunci

$$(\phi \cup \gamma)_0(u) = \{x(-\infty + 0) | x \in (f \cup g)(u)\} = \{x(-\infty + 0) | x \in f(u)\} = \phi_0(u).$$

□

TEOREMĂ 99. *Presupunem că* f, g *au stări finale. Avem* $(\phi \cup \gamma)_f : U \cup V \to P^*(\mathbf{B}^n)$,

$$\forall u \in U \cup V, (\phi \cup \gamma)_f(u) = \begin{cases} \phi_f(u),\ u \in U \setminus V \\ \gamma_f(u),\ u \in V \setminus U \\ \phi_f(u) \cup \gamma_f(u),\ u \in U \cap V \end{cases},$$

$$(\Theta \cup \Gamma)_f = \bigcup_{u \in U \cup V} (\phi \cup \gamma)_f(u),$$

unde notaţiile sunt evidente şi similare acelora din teorema precedentă.

TEOREMĂ 100. *Considerăm sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $f_1 : U_1 \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, *cu* $U, U_1, V \in P^*(S^{(m)})$. *Dacă* $f \subset f_1$, *atunci* $f \cup g \subset f_1 \cup g$.

DEMONSTRAŢIE. Din $U \subset U_1$ deducem că $U \cup V \subset U_1 \cup V$. Se arată că $\forall u \in U \cup V, (f \cup g)(u) \subset (f_1 \cup g)(u)$ e adevărată în toate cele trei situaţii $u \in U \setminus V, u \in V \setminus U$ şi $u \in U \cap V$. □

TEOREMĂ 101. *Avem*

$$(f \cup g)^* = f^* \cup g^*.$$

DEMONSTRAŢIE. Remarcăm că mulţimile suport ale celor două sisteme sunt $(U \cup V)^* = U^* \cup V^*$. Fie un $u \in U^* \cup V^*$ arbitrar. Dacă $u \in U^* \setminus V^*$, atunci $f^*(u) = (f^* \cup g^*)(u)$ şi faptul că $\overline{u} \in U \setminus V$ implică $(f \cup g)(\overline{u}) = f(\overline{u})$. Deci

$$(f \cup g)^*(u) = \{\overline{x} | x \in (f \cup g)(\overline{u})\} = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} = f^*(u) = (f^* \cup g^*)(u).$$

Dacă $u \in V^* \setminus U^*$, situaţia e similară. În acest moment presupunem că $u \in U^* \cap V^*$, ceea ce dă $f^*(u) \cup g^*(u) = (f^* \cup g^*)(u), \overline{u} \in U \cap V, (f \cup g)(\overline{u}) = f(\overline{u}) \cup g(\overline{u})$ şi avem

$$(f \cup g)^*(u) = \{\overline{x} | x \in (f \cup g)(\overline{u})\} = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u}) \cup g(\overline{u})\} =$$

$$= \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} \cup \{\overline{x} | x \in g(\overline{u})\} = f^*(u) \cup g^*(u) = (f^* \cup g^*)(u).$$

În toate cele trei situaţii egalitatea a fost demonstrată ca fiind adevărată. □

TEOREMĂ 102. *Considerăm sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)}), g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$. *Sistemele* $(f \cup g)^{-1}$, $f^{-1} \cup g^{-1}$ *au suporturile egale cu*

$$X = \bigcup_{u \in U} f(u) \cup \bigcup_{u \in V} g(u)$$

şi următoarea egalitate e adevărată

$$(f \cup g)^{-1} = f^{-1} \cup g^{-1}.$$

DEMONSTRAŢIE. Suportul lui $(f \cup g)^{-1}$ este $\bigcup\limits_{u \in U \cup V} (f \cup g)(u)$ şi coincide cu X, care e în mod evident suportul lui $f^{-1} \cup g^{-1}$. Pentru orice $x \in X$ avem

$$(f \cup g)^{-1}(x) = \{u | u \in U \cup V, x \in (f \cup g)(u)\} = \{u | u \in U \setminus V, x \in f(u)\} \cup$$
$$\cup \{u | u \in V \setminus U, x \in g(u)\} \cup \{u | u \in U \cap V, x \in f(u)\} \cup \{u | u \in U \cap V, x \in g(u)\} =$$
$$= \{u | u \in U, x \in f(u)\} \cup \{u | u \in V, x \in g(u)\}$$

şi, pe de altă parte,

$$(f^{-1} \cup g^{-1})(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), x \in \bigcup\limits_{u \in U} f(u) \setminus \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \\ g^{-1}(x), x \in \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \setminus \bigcup\limits_{u \in U} f(u) \\ f^{-1}(x) \cup g^{-1}(x), x \in \bigcup\limits_{u \in U} f(u) \cap \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \{u | u \in U, x \in f(u)\}, x \in \bigcup\limits_{u \in U} f(u) \setminus \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \\ \{u | u \in V, x \in g(u)\}, x \in \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \setminus \bigcup\limits_{u \in U} f(u) \\ \{u | u \in U, x \in f(u)\} \cup \{u | u \in V, x \in g(u)\}, x \in \bigcup\limits_{u \in U} f(u) \cap \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \end{cases}.$$

Validitatea egalităţii din afirmaţia teoremei se verifică în trei cazuri: $x \in \bigcup\limits_{u \in U} f(u) \setminus \bigcup\limits_{u \in V} g(u)$, $x \in \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \setminus \bigcup\limits_{u \in U} f(u)$ şi $x \in \bigcup\limits_{u \in U} f(u) \cap \bigcup\limits_{u \in V} g(u)$. □

TEOREMĂ 103. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$ *şi* $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$. *Suportul comun al lui* $(f \cup g) \times f'$ *şi* $(f \times f') \cup (g \times f')$ *este* $(U \cup V) \times U' = (U \times U') \cup (V \times U')$ *şi următoarea egalitate*

$$(f \cup g) \times f' = (f \times f') \cup (g \times f')$$

e adevărată.

DEMONSTRAŢIE. Pentru $\forall u \times u' \in (U \cup V) \times U'$ avem una din următoarele posibilităţi:

Cazul $u \times u' \in (U \setminus V) \times U' = (U \times U') \setminus (V \times U')$,

$$((f \cup g) \times f')(u \times u') = (f \cup g)(u) \times f'(u') = f(u) \times f'(u') = (f \times f')(u \times u') =$$
$$= ((f \times f') \cup (g \times f'))(u \times u');$$

Cazul $u \times u' \in (V \setminus U) \times U'$ se tratează în mod similar;

Cazul $u \times u' \in (U \cap V) \times U' = (U \times U') \cap (V \times U')$,

$$((f \cup g) \times f')(u \times u') = (f \cup g)(u) \times f'(u') = (f(u) \cup g(u)) \times f'(u') =$$
$$= (f(u) \times f'(u')) \cup (g(u) \times f'(u')) = (f \times f')(u \times u') \cup (g \times f')(u \times u') =$$
$$= ((f \times f') \cup (g \times f'))(u \times u').$$

□

TEOREMĂ 104. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $f_1' : U_1' \to P^*(S^{(n')})$, *cu* $U, V, U_1' \in P^*(S^{(m)})$. *Dacă* $U \cap U_1' \neq \emptyset$, $V \cap U_1' \neq \emptyset$, *atunci suportul comun al sistemelor* $(f \cup g, f_1')$, $(f, f_1') \cup (g, f_1')$ *e* $(U \cup V) \cap U_1' = (U \cap U_1') \cup (V \cap U_1')$ *şi avem*

$$(f \cup g, f_1') = (f, f_1') \cup (g, f_1').$$

OBSERVATIE 32. *Ultimele două teoreme au consecinţe privitoare la adevărul formulelor*

$$f \times (f' \cup g') = (f \times f') \cup (f \times g'),$$

$$(f \cup g) \times (f' \cup g') = (f \times f') \cup (f \times g') \cup (g \times f') \cup (g \times g')$$

şi al formulelor

$$(f, f_1' \cup g_1') = (f, f_1') \cup (f, g_1'),$$

$$(f \cup g, f_1' \cup g_1') = (f, f_1') \cup (f, g_1') \cup (g, f_1') \cup (g, g_1').$$

TEOREMĂ 105. *Se dau sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$ *şi* $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $h_1 : X_1 \to P^*(S^{(p)})$, $X, X_1 \in P^*(S^{(n)})$.

a) Presupunem că $\bigcup\limits_{u\in U} f(u) \cup \bigcup\limits_{u\in V} g(u) \subset X$. *Atunci* $h \circ (f \cup g)$, $(h \circ f) \cup (h \circ g)$ *există şi următoarea egalitate*

$$h \circ (f \cup g) = (h \circ f) \cup (h \circ g)$$

e îndeplinită.

b) Dacă $\bigcup\limits_{u\in U} f(u) \subset X$, $\bigcup\limits_{u\in U} f(u) \subset X_1$ *atunci sistemele* $(h\cup h_1)\circ f$, $(h\circ f)\cup(h_1\circ f)$ *există şi avem*

$$(h \cup h_1) \circ f = (h \circ f) \cup (h_1 \circ f).$$

DEMONSTRAŢIE. a) Cum $\bigcup\limits_{u\in U\cup V} (f\cup g)(u) = \bigcup\limits_{u\in U} f(u) \cup \bigcup\limits_{u\in V} g(u) \subset X$, deducem existenţa lui $h \circ (f \cup g)$. Incluziunile $\bigcup\limits_{u\in U} f(u) \subset X$, $\bigcup\limits_{u\in V} g(u) \subset X$ arată că $h \circ f, h \circ g, (h\circ f)\cup(h\circ g)$ sunt şi ele definite şi suportul comun al lui $h\circ(f\cup g)$ şi $(h\circ f)\cup(h\circ g)$ e $U \cup V$. Următoarele egalităţi sunt îndeplinite:

$$\forall u \in U \cup V, (h \circ (f \cup g))(u) = \bigcup_{x\in(f\cup g)(u)} h(x) = \begin{cases} \bigcup\limits_{x\in f(u)} h(x), u \in U \setminus V \\ \bigcup\limits_{x\in g(u)} h(x), u \in V \setminus U \\ \bigcup\limits_{x\in f(u)\cup g(u)} h(x), u \in U \cap V \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \bigcup\limits_{x\in f(u)} h(x), u \in U \setminus V \\ \bigcup\limits_{x\in g(u)} h(x), u \in V \setminus U \\ \bigcup\limits_{x\in f(u)} h(x) \cup \bigcup\limits_{x\in g(u)} h(x), u \in U \cap V \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (h \circ f)(u), u \in U \setminus V \\ (h \circ g)(u), u \in V \setminus U \\ (h \circ f)(u) \cup (h \circ g)(u), u \in U \cap V \end{cases} = ((h \circ f) \cup (h \circ g))(u).$$

b) Din ipoteză $\bigcup\limits_{u\in U} f(u) \subset X \cup X_1$, aşadar $(h \cup h_1) \circ f$ există. Pe de altă parte $h \circ f$, $h_1 \circ f$, $(h \circ f) \cup (h_1 \circ f)$ există şi ele. Suportul comun al sistemelor $(h \cup h_1) \circ f, (h \circ f) \cup (h_1 \circ f)$ e U. Putem vedea că

$$\forall u \in U, ((h \cup h_1) \circ f)(u) = \bigcup_{x\in f(u)} (h \cup h_1)(x) = \bigcup_{x\in f(u)} h(x) \cup \bigcup_{x\in f(u)} h_1(x) =$$

$$= (h \circ f)(u) \cup (h_1 \circ f)(u) = ((h \circ f) \cup (h_1 \circ f))(u).$$

□

14. Morfisme

Definitie 48. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \subset S^{(m)}$ *şi* $f' : U' \to P^*(S^{(n')}), U' \subset S^{(m')}$. *Numim* ***morfism*** *(de sisteme) de la* f *la* f' *şi notăm* $(\omega, \Omega) : f \to f'$ *o pereche de funcţii* $\omega : U \to U'$, $\Omega : P^*(S^{(n)}) \to P^*(S^{(n')})$ *cu proprietatea că următoarea diagramă e comutativă*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & P^*(S^{(n)}) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \Omega \\ U' & \xrightarrow{f'} & P^*(S^{(n')}) \end{array}$$

Observatie 33. *Existenţa unui morfism* $f \to f'$ *arată că* f' *reproduce proprietăţile lui* f. *Originea cuvântului 'morfism' e cuvântul grec 'morphe' (Le Petit Robert) cu semnificaţia de 'formă'. Deci* f' *e o altă formă a lui* f.

Exemplu 24. *Pentru orice sistem* f, *următoarea diagramă e comutativă:*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & P^*(S^{(n)}) \\ 1_U \downarrow & & \downarrow 1_{P^*(S^{(n)})} \\ U & \xrightarrow{f} & P^*(S^{(n)}) \end{array}$$

Ea defineşte un morfism $(1_U, 1_{P^*(S^{(n)})}) : f \to f$ *numit* ***morfismul identic***. *Notaţia uzuală pentru morfismul identic e* 1_f.

Exemplu 25. *Definim funcţiile*

$$\omega : U \to U^*, \forall u \in U, \omega(u) = \overline{u},$$

$$\Omega : P^*(S^{(n)}) \to P^*(S^{(n)}), \forall X \in P^*(S^{(n)}), \Omega(X) = X^*.$$

Deoarece următoarea diagramă

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & P^*(S^{(n)}) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \Omega \\ U^* & \xrightarrow{f^*} & P^*(S^{(n)}) \end{array}$$

e comutativă

$$\forall u \in U, (f^* \circ \omega)(u) = f^*(\omega(u)) = f^*(\overline{u}) = \{\overline{x} | x \in f(u)\} = \Omega(f(u)) = (\Omega \circ f)(u),$$

deducem că $(\omega, \Omega) : f \to f^*$ *e un morfism de sisteme. Remarcăm că se poate defini un morfism* $f^* \to f$ *într-o manieră similară.*

EXERCITIU 1. *Se dau sistemele* $f : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)})$. *Cititorul poate dori să construiască morfisme* $f \to f'$, *unde* f' *e unul din următoarele sisteme:*

a) $f' : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)}), \forall u \in S^{(m)}, f'(u) = \{\overline{x} | x \in f(u)\}$;

b) $f' : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)}), \forall u \in S^{(m)}, f'(u) = \{a \cdot x | x \in f(u)\}$, *cu* $a \in S$ *şi am folosit notaţia*

$$(a \cdot x)(t) = (a(t) \cdot x_1(t), ..., a(t) \cdot x_n(t));$$

c) $f' : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)}), \forall u \in S^{(m)}, f'(u) = \{a \cup x | x \in f(u)\}$, *cu* $a \in S$ *şi am notat*

$$(a \cup x)(t) = (a(t) \cup x_1(t), ..., a(t) \cup x_n(t));$$

d) $f' : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)}), \forall u \in S^{(m)}, f'(u) = f(u) \cap X$, *unde* $X \subset S^{(n)}$ *satisface* $\forall u \in S^{(m)}, f(u) \cap X \neq \emptyset$;

e) $f' : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)}), \forall u \in S^{(m)}, f'(u) = f(u) \cup X$, *unde* $X \subset S^{(n)}$;

f) $f' : S^{(m+1)} \to P^*(S^{(n)}), \forall (u_1, ..., u_m, u_{m+1}) \in S^{(m+1)}, f'(u_1, ..., u_m, u_{m+1}) = f(u_1, ..., u_m)$;

g) $f' : S^{(m-1)} \to P^*(S^{(n)}), \forall u \in S^{(m)}, f'(u_1, ..., \widehat{u}_i, ..., u_m) = f(u_1, ..., u_i, ..., u_m)$ *unde* $m > 1$, $i \in \{1, ..., m\}$, f *nu depinde de* u_i *şi am folosit notaţia* $\widehat{u}_i$ *pentru a arăta faptul că coordonata* u_i *lipseşte.*

Există şi alte morfisme $f \times f' \to f$, $f \times f' \to f'$, $(f, f') \to f$, $(f, f') \to f'$ *pe care cititorul e invitat să le scrie.*

TEOREMĂ 106. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$, $f'' : U'' \to P^*(S^{(n'')})$, $U'' \in P^*(S^{(m'')})$ *şi morfismele* $(\omega, \Omega) : f \to f'$, $(\omega', \Omega') : f' \to f''$. *Avem morfismul* $(\omega', \Omega') \circ (\omega, \Omega) : f \to f''$ *definit prin*

$$(\omega', \Omega') \circ (\omega, \Omega) = (\omega' \circ \omega, \Omega' \circ \Omega), \tag{14.1}$$

unde, în partea dreaptă a lui (14.1), '$\circ$*' e compunerea uzuală a funcţiilor.*

DEMONSTRAŢIE. Ipoteza afirmă comutativitatea diagramelor

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & P^*(S^{(n)}) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \Omega \\ U' & \xrightarrow{f'} & P^*(S^{(n')}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{f'} & P^*(S^{(n')}) \\ \omega' \downarrow & & \downarrow \Omega' \\ U'' & \xrightarrow{f''} & P^*(S^{(n'')}) \end{array}$$

şi concluzia se referă la comutativitatea diagramei

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & P^*(S^{(n)}) \\ \omega' \circ \omega \downarrow & & \downarrow \Omega' \circ \Omega \\ U'' & \xrightarrow{f''} & P^*(S^{(n'')}) \end{array}$$

Din ipoteză deducem următoarele:

$$\forall u \in U, (f'' \circ (\omega' \circ \omega))(u) = ((f'' \circ \omega') \circ \omega)(u) = ((\Omega' \circ f') \circ \omega)(u) =$$

$$= (\Omega' \circ (f' \circ \omega))(u) = (\Omega' \circ (\Omega \circ f))(u) = ((\Omega' \circ \Omega) \circ f)(u).$$

Aşadar $(\omega' \circ \omega, \Omega' \circ \Omega) : f \to f''$ e un morfism de sisteme. □

DEFINITIE 49. *Dacă sistemele* f, f' *au proprietatea de existenţă a morfismelor* $(\omega, \Omega) : f \to f'$, $(\omega', \Omega') : f' \to f$ *aşa încât*

$$(\omega', \Omega') \circ (\omega, \Omega) = 1_f,$$
$$(\omega, \Omega) \circ (\omega', \Omega') = 1_{f'},$$

atunci ele se numesc ***izomorfe*** *şi morfismele* (ω, Ω), (ω', Ω') *se numesc* ***izomorfisme****.*

OBSERVATIE 34. *Sistemele* f *şi* f^* *sunt izomorfe. În Exerciţiul 1,* f *e izomorf cu sistemele* f' *de la a), f) şi, dacă* f *nu depinde de* u_i*, atunci g) dă un alt exemplu de sistem* f' *care e izomorf cu* f*.*

Sistemele asincrone formează o categorie Sys: obiectele sale sunt sistemele şi morfismele sale sunt definite ca în Definiţia 48. Pentru orice $f \in ObSys$ *morfismul unitate e* 1_f *şi pentru orice morfisme* $(\omega, \Omega) : f \to f'$, $(\omega', \Omega') : f' \to f''$, *compunerea lor e definită ca în (14.1).*

Terminăm această secţiune arătând un mod de a construi morfisme de sisteme sugerat în [**21**] *de Moisil. Fie* $\pi : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ *o funcţie. Ea induce funcţiile* $\widetilde{\pi} : S^{(n)} \to S^{(n)}, \widehat{\pi} : P^*(S^{(n)}) \to P^*(S^{(n)})$ *definite în felul următor:*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall x \in S^{(n)}, \widetilde{\pi}(x)(t) = \pi(x(t)),$$
$$\forall X \in P^*(S^{(n)}), \widehat{\pi}(X) = \{\widetilde{\pi}(x) | x \in X\}.$$

Perechile $(1_U, \widehat{\pi})$ *se numesc* ***morfisme sub o intrare dată****. Când* π *e o bijecţie, ele devin izomorfisme.*

CAPITOLUL 5

Proprietăţile generale ale sistemelor

Se definesc mulţimi de funcţii asociate sistemelor, de asemenea se definesc şi se analizează diverse proprietăţi ale sistemelor. Se dau mai multe definiţii ale neanticipativitaţii şi ale injectivităţii, împreună cu lungi comentarii şi rezultate legate de ele.

1. Funcţia stare iniţială constantă. Ini ţializare

Definitie 50. *Sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$* ***are funcţia stare iniţială constantă*** *dacă*

$$\exists k \in \{1, ..., 2^n\}, \exists \mu^1 \in \mathbf{B}^n, ..., \exists \mu^k \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \phi_0(u) = \{\mu^1, ..., \mu^k\}.$$

Observatie 35. *Constanţa lui ϕ_0 înseamnă că ştim printre ce valori putem căuta, $\forall u \in U$, valorile iniţiale ale stărilor lui f. Iniţializarea, i.e. proprietatea unui sistem de a avea o stare iniţială (constantă) e dată de oricare din următoarele afirmaţii echivalente*

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \phi_0(u) = \mu$$

şi reprezintă una dintre cele mai importante proprietăţi ale sistemelor.

Teoremă 107. *Fie două sisteme f, g cu proprietatea $f \subset g$.*

a) Dacă cele două funcţii stare iniţială ϕ_0, γ_0 sunt constante, atunci are loc incluziunea de mulţimi $\phi_0 \subset \gamma_0$.

b) Dacă g e iniţializat, atunci f e iniţializat de asemenea şi $\phi_0 = \gamma_0$, i.e. cele două stări iniţiale coincid.

Demonstraţie. a) Caz particular al Teoremei 39.

b) În incluziunea $\phi_0 \subset \gamma_0$, ϕ_0 e nevidă şi γ_0 are un element, aşadar are loc egalitatea $\phi_0 = \gamma_0$. □

Teoremă 108. *Dacă f are o funcţie stare iniţială constantă ϕ_0 (dacă f e iniţializat), atunci f^* are o funcţie stare iniţială constantă ϕ_0^* (atunci f^* e iniţializat) şi $\phi_0^* = \{\overline{\mu} | \mu \in \phi_0\}$ (şi $\phi_0^* = \overline{\phi_0}$).*

Demonstraţie. Avem

$$\phi_0 = \{\mu^1, ..., \mu^k\} \Longleftrightarrow \forall u \in U, \{\mu^1, ..., \mu^k\} = \{x(-\infty + 0) | x \in f(u)\}$$
$$\Longleftrightarrow \forall u \in U^*, \{\mu^1, ..., \mu^k\} = \{x(-\infty + 0) | x \in f(\overline{u})\}$$
$$\Longleftrightarrow \forall u \in U^*, \{\overline{\mu^1}, ..., \overline{\mu^k}\} = \{\overline{x(-\infty + 0)} | x \in f(\overline{u})\}$$
$$\Longleftrightarrow \forall u \in U^*, \{\overline{\mu^1}, ..., \overline{\mu^k}\} = \{x(-\infty + 0) | x \in f^*(u)\} \Longleftrightarrow \{\overline{\mu^1}, ..., \overline{\mu^k}\} = \phi_0^*.$$

□

TEOREMĂ 109. *Dacă sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ *şi* $f' : U' \to P^*(S^{(n')}), U' \in P^*(S^{(m')})$ *au funcţiile stare iniţială* ϕ_0, ϕ_0' *constante, atunci produsul lor* $f \times f'$ *are funcţia stare iniţială* $(\phi \times \phi')_0$ *constantă. Dacă* f *şi* f' *sunt iniţializate, atunci* $f \times f'$ *e şi ea iniţializată.*

DEMONSTRAŢIE. Din Teorema 61 avem $(\phi \times \phi')_0 = \phi_0 \times \phi_0'$ produs cartezian de mulţimi. Dacă ϕ_0 şi ϕ_0' au un singur element, atunci produsul lor catezian $\phi_0 \times \phi_0'$ are un singur element. □

TEOREMĂ 110. *Presupunem că sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$ *şi* $f_1' : U_1' \to P^*(S^{(n')})$, $U, U_1' \in P^*(S^{(m)})$ *satisfac* $U \cap U_1' \neq \emptyset$*. Dacă ele au funcţiile stare iniţială constante, atunci legarea în paralel* (f, f_1') *are funcţia stare iniţială constantă. În particular, dacă* f *şi* f_1' *sunt iniţializate, atunci* (f, f_1') *e iniţializat.*

TEOREMĂ 111. *Sistemele* f *şi* $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$ *sunt date aşa încât incluziunea* $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$ *are loc. Dacă* h *are funcţia stare iniţială constantă, atunci* $h \circ f$ *are funcţia stare iniţială constantă. Dacă* h *e iniţializat, atunci* $h \circ f$ *e iniţializat de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Notăm cu $\eta_0 : X \to P^*(\mathbf{B}^p)$ funcţia stare iniţială a lui h şi cu $\delta_0 : U \to P^*(\mathbf{B}^p)$ funcţia stare iniţială a lui $h \circ f$. Ipoteza afirmă existenţa lui $k \in \{1, ..., 2^p\}$ şi $\nu^1, ..., \nu^k \in \mathbf{B}^p$, aşa încât

$$\forall x \in X, \eta_0(x) = \{y(-\infty + 0) | y \in h(x)\} = \{\nu^1, ..., \nu^k\},$$

de unde deducem, ţinând cont de Teorema 72, că

$$\forall u \in U, \delta_0(u) = \bigcup_{x \in f(u)} \eta_0(x) = \{\nu^1, ..., \nu^k\}.$$

Rezultă în acest moment a doua afirmaţie. Însă acest rezultat a fost deja demonstrat în Teorema 68. □

TEOREMĂ 112. *Se dau sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$ *şi* $g : V \to P^*(S^{(n)})$ *cu* $U, V \in P^*(S^{(m)})$*, care satisfac proprietatea că mulţimea*

$$W = \{u | u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}$$

e nevidă. Dacă funcţiile lor stare iniţială ϕ_0, γ_0 *sunt constante, atunci funcţia stare iniţială* $(\phi \cap \gamma)_0$ *a intersecţiei* $f \cap g$ *e constantă. Dacă unul dintre* f, g *e iniţializat, atunci* $f \cap g$ *e iniţializat de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Aplicăm Teorema 85, de unde se obţine $(\phi \cap \gamma)_0 = \phi_0 \cap \gamma_0$. Dacă în această egalitate una dintre mulţimile ϕ_0 şi γ_0 are un element, atunci intersecţia $\phi_0 \cap \gamma_0$ are un element, deci sistemul $f \cap g$ e iniţializat. □

OBSERVATIE 36. *Fie sistemele* f *şi* g*. Dacă cele doua funcţii* ϕ_0 *şi* γ_0 *sunt constante, atunci în general reuniunea* $f \cup g$ *nu are funcţia stare iniţială* $(\phi \cup \gamma)_0$ *constantă (vezi Teorema 98). Dar dacă* f, g *sunt iniţializate cu* $\phi_0 = \gamma_0$*, atunci sistemul* $f \cup g$ *e iniţializat cu* $(\phi \cup \gamma)_0 = \phi_0 = \gamma_0$*. Un rezultat de aceeaşi natură a fost demonstrat în Teorema 94, b).*

2. Autonomia

DEFINITIE 51. *Numim* ***sistem autonom****, oricare din următoarele concepte:*
a) sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ *dat de funcţia constantă*

$$\exists X \in P^*(S^{(n)}), \forall u \in U, f(u) = X;$$

b) sistemul f *aflat în cazul particular când are o singură intrare,* $|U| = 1$[1]*;*
c) mulţimea $X \in P^*(S^{(n)})$.

În mod implicit, prin sistem autonom vom înţelege în ceea ce urmează conceptul de la litera a). Totuşi, atunci când vor interveni diferenţe semnificative între a), b), c), pentru a evita neînţelegerile, vom specifica ce concept de autonomie folosim.

NOTATIE 16. *Sistemul autonom* f *e în general notat cu* X*, sau* $f = X$ *potrivit convenţiei de a identifica funcţia constantă cu constanta.*

OBSERVATIE 37. *Sistemele autonome pot fi considerate ca fiind fără intrări deoarece stările* $x \in X$ *sunt aceleaşi pentru toţi* $u \in U$*. De aici avem unul din înţelesurile Definiţiei 51, c).*

EXEMPLU 26. *Sistemul total definit de* $S^{(n)} : S^{(m)} \to P^*(S^{(n)}), \forall u \in S^{(m)}$, $S^{(n)}(u) = S^{(n)}$ *e autonom.*

EXEMPLU 27. *Sistemul funcţiilor monoton descrescătoare* $f : S^{(m)} \to P^*(S)$, $\forall u \in S^{(m)}, f(u) = \{x|x \in S, \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 0\}$ *e autonom. Fiecare dintre stările sale comută cel mult o dată de la* 1 *la* 0*.*

EXEMPLU 28. *Fie sistemul* $f : S^{(m)} \to P^*(S)$ *definit de inegalităţile*

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r]} x(\xi),$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_f]} \overline{x(\xi)}$$

unde $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$*. Stările sale* $x \in S$ *sunt numite* ***absolut inerţiale*** *şi au proprietatea că după comutarea de la 0 la 1 rămân egale cu 1 mai mult decât* δ_r *unităţi de timp şi după comutarea de la 1 la 0 rămân egale cu 0 mai mult decât* δ_f *unităţi de timp. Sistemul* f *e autonom.*

EXEMPLU 29. *Ecuaţia*

$$\bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r]} x(\xi) = 0,$$

cu $\delta_r > 0$*, defineşte un sistem autonom* $f : S^{(m)} \to P^*(S)$ *cu stările* $x \in S$ *având* $x(-\infty + 0) = 0$ *şi 1-impulsuri de lungime* $\leq \delta_r$*.*

TEOREMĂ 113. *Fie sistemul autonom* $X \in P^*(S^{(n)})$.
a) Are loc următoarea proprietate de existenţă a stării iniţiale

$$\forall x \in X, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

b) Existenţa stărilor iniţiale fără curse coincide cu existenţa stării iniţiale constante şi e dată de

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in X, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

[1]$|\ |$ e notaţia uzuală a numărului de elemente ale unei mulţimi; Definiţia 51, b) a fost dată în [**11**].

DEMONSTRAŢIE. Aceste proprietăţi sunt aceleaşi ca şi (2.1),...,(2.3) din Capitolul 4, unde cuantificarea $\forall u \in U$ lipseşte deoarece stările $x \in X$ nu depind de alegerea intrării u. $\square$

TEOREMĂ 114. *Dacă f e autonom în sensul existenţei lui $X \in P^*(S^{(n)})$ aşa încât $\forall u \in U, f(u) = X$, atunci*

a) f are timp iniţial nemărginit

$$\forall x \in X, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

b) existenţa atât a timpului iniţial mărginit cât şi a timpului iniţial fix coincide cu

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in X, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

DEMONSTRAŢIE. Acestea sunt proprietăţile (3.1),...,(3.3) din Capitolul 4, unde cuantificarea $\forall u \in U$ lipseşte. $\square$

TEOREMĂ 115. *Să presupunem că f e un sistem autonom, $f = X$. Au loc următoarele echivalenţe:*

a) f are stări iniţiale şi timp iniţial nemărginit dacă şi numai dacă

$$\forall x \in X, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

b) f are stări iniţiale şi timp iniţial mărginit dacă şi numai dacă

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in X, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

c) f are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial nemărginit dacă şi numai dacă

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in X, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

d) f are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial mărginit dacă şi numai dacă

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in X, \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

TEOREMĂ 116. *Funcţia stare iniţială a sistemului autonom f e constantă şi egală cu mulţimea stărilor iniţiale.*

DEMONSTRAŢIE. Prin ipoteză există o mulţime X aşa încât $\forall u \in U, f(u) = X$. Din definiţia lui ϕ_0 obţinem

$$\forall u \in U, \phi_0(u) = \{x(-\infty + 0) | x \in f(u)\} = \{x(-\infty + 0) | x \in X\} = \Theta_0.$$

$\square$

TEOREMĂ 117. *Se dă sistemul autonom $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \subset S^{(m)}$. Atunci f^* e autonom.*

DEMONSTRAŢIE. Sistemul $f^* : U^* \to P^*(S^{(n)})$ e definit prin $\forall u \in U^*, f^*(u) = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} = \{\overline{x} | x \in X\} = X^*$, unde am considerat că $\forall u \in U, f(u) = X$. $\square$

TEOREMĂ 118. *Dacă f e autonom, atunci f^{-1} e de asemenea autonom.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $\forall u \in U, f(u) = X$, atunci $\forall x \in X, f^{-1}(x) = U$. $\square$

TEOREMĂ 119. *Produsul cartezian şi legarea în paralel a sistemelor autonome sunt sisteme autonome.*

DEMONSTRAŢIE. Ipoteza afirmă că $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \subset S^{(m)}$, $f' : U' \to P^*(S^{(n')}), U' \subset S^{(m')}$ sunt două sisteme cu $\forall u \in U, f(u) = X$ şi $\forall u' \in U', f'(u') = X'$, unde $X \in P^*(S^{(n)})$, $X' \in P^*(S^{(n')})$ sunt spaţii oarecare de funcţii. Obţinem

$$\forall u \times u' \in U \times U', (f \times f')(u \times u') = f(u) \times f'(u') = X \times X'.$$

Situaţia e similară în cel de-al doilea caz. □

TEOREMĂ 120. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \subset S^{(m)}$, $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \subset S^{(n)}$, *unde* $\bigcup_{u \in U} f(u) \subset X$.

a) Dacă f e autonom, atunci $h \circ f$ e autonom.
b) Dacă h e autonom, atunci $h \circ f$ e autonom.
c) Dacă f şi h sunt autonome, atunci $h \circ f$ e autonom.

DEMONSTRAŢIE. a) Există prin ipoteză $X_1 \in P^*(S^{(n)})$ aşa încât $\forall u \in U, f(u) = X_1$ şi $X \subset X_1$. În aceste circumstanţe avem

$$\forall u \in U, (h \circ f)(u) = \bigcup_{x \in f(u)} h(x) = \bigcup_{x \in X_1} h(x).$$

b) Există $Y \in P^*(S^{(p)})$ aşa încât $\forall x \in X, h(x) = Y$. Atunci

$$\forall u \in U, (h \circ f)(u) = \bigcup_{x \in f(u)} h(x) = Y.$$

□

TEOREMĂ 121. *Fie sistemele autonome f, g. Dacă există $f \cap g$, atunci e şi el autonom.*

DEMONSTRAŢIE. Când există X, X_1 aşa încât $\forall u \in U, f(u) = X, \forall u \in V, g(u) = X_1$, $U \cap V \neq \emptyset$ şi $X \cap X_1 \neq \emptyset$, avem

$$\forall u \in U \cap V, (f \cap g)(u) = f(u) \cap g(u) = X \cap X_1.$$

□

TEOREMĂ 122. *Fie sistemele f, g. Dacă una din următoarele cerinţe de autonomie e îndeplinită:*

a) $\exists X \in P^*(S^{(n)}), \forall u \in U, f(u) = X, \forall v \in V, g(v) = X$;
b) $U = V$ *şi* $\exists X \in P^*(S^{(n)}), \forall u \in U, f(u) = X, \exists X' \in P^*(S^{(n)}), \forall u \in U, g(u) = X'$,

atunci $f \cup g$ e autonom.

3. Spaţiul intrării finit

DEFINITIE 52. *Sistemul* $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ *se spune că are* ***spaţiul intrării finit*** *dacă mulţimea U e finită.*

TEOREMĂ 123. *Dacă $|U| = k \geq 1$, atunci f e reuniunea disjunctă a k sisteme autonome (în sensul Definiţiei 51, b)).*

DEMONSTRAŢIE. Prin ipoteză $U = \{u^1, ..., u^k\}$ şi definim sistemele autonome $f_q : U_q \to P^*(S^{(n)})$ prin

$$U_q = \{u^q\},$$
$$\forall u \in U_q, f_q(u) = f(u),$$

$q = \overline{1, k}$. Am obţinut că $f = f_1 \cup ... \cup f_k$, reuniune disjunctă. □

OBSERVATIE 38. *Putem desigur interpreta intrările admisibile $u \in U$ ca fiind comenzi. Atunci finitudinea lui U arată faptul că circuitul poate evolua într-un număr finite de moduri.*

Faptul că sistemele cu spaţiul intrării finit sunt reuniuni de sisteme autonome e un bun motiv pentru a considera sistemele autonome ca importante în analiza sistemelor.

Dacă g are spaţiul intrării finit şi $f \subset g$, atunci f are spaţiul intrării finit. Dacă f are spaţiul intrării finit, atunci f^* are aceeaşi proprietate. Produsul cartezian de sisteme cu spaţiul intrării finit e un sistem cu spaţiul intrării finit. Dacă există legarea în paralel (f, f_1') şi f, f_1' au spaţiul intrării finit, atunci (f, f_1') are spaţiul intrării finit de asemenea. Dacă f are spaţiul intrării finit şi $h \circ f$ există, atunci $h \circ f$ are spaţiul intrării finit. Dacă f are spaţiul intrării finit şi există $f \cap g$, atunci $f \cap g$ are spaţiul intrării finit de asemenea. Dacă f şi g au spaţiul intrării finit, atunci $f \cup g$ are aceeaşi proprietate.

4. Sisteme finite şi deterministe

DEFINITIE 53. *Sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ e **finit** dacă satisface proprietatea că $\forall u \in U, f(u)$ are un număr finit de elemente şi e **infinit** în caz contrar. Sistemul f e **determinist** dacă $\forall u \in U, f(u)$ are un singur element şi e **nedeterminist** în caz contrar.*

OBSERVATIE 39. *Spre deosebire de secţiunea precedentă unde cuvântul 'finit' a caracterizat spaţiul intrărilor, aici 'finit' se referă la mulţimi de stări posibile. Acesta e sensul implicit al atributului 'finit' dat unui sistem.*

Atunci când sistemul e dat sub forma implicită, finitudinea înseamnă că ecuaţiile şi inecuaţiile au un număr finit de soluţii, iar determinismul înseamnă existenţa unei soluţii unice.

Finitudinea e utilă atunci când în modelare lucrăm cu 'cel mai favorabil caz', 'cel mai defavorabil caz', 'cel mai frecvent caz' etc.

Sistemele deterministe pot fi identificate cu funcţiile $U \to S^{(n)}$, ceea ce s-a şi făcut deja. Astfel de modele arată o cunoaştere perfectă a comportării unui circuit.

EXEMPLU 30. *Sistemul $f : S \to S$ definit de*

$$\forall u \in S, f(u)(t) = \int_{-\infty}^{t} D_{01}u$$

e determinist, unde am notat

$$\int_{-\infty}^{t} D_{01}u = \begin{cases} 0, \text{dacă } |(-\infty, t] \cap supp\ D_{01}u| \text{ e par} \\ 1, \text{dacă } |(-\infty, t] \cap supp\ D_{01}u| \text{ e impar} \end{cases} .$$

şi 0 a fost considerat număr par. Pentru a stabili corectitudinea acestui exemplu, să observăm mai întâi că $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in S$, mulţimea $(-\infty, t] \cap suppD_{01}u$ e finită. Aşadar are sens să ne referim la paritatea sa. Apoi, pentru toţi $u \in S$, funcţia de t: $\int_{-\infty}^{t} D_{01}u$ aparţine într-adevăr lui S.

EXEMPLU 31. *Pentru funcţia Booleană* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}$, *notăm prin* $\partial_j F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}$, $j \in \{1, ..., m\}$ *derivatele sale Boolene*

$$\forall \lambda \in \mathbf{B}^m, \partial_j F(\lambda) = F(\lambda_1, ..., \underset{j}{0}, ..., \lambda_m) \oplus F(\lambda_1, ..., \underset{j}{1}, ..., \lambda_m).$$

Sistemul $f : S^{(m)} \to S^{(m)}$ *definit de*

$$\forall u \in S^{(m)}, f(u)(t) = (\partial_1 F(u(t)), ..., \partial_m F(u(t)))$$

e determinist.

TEOREMĂ 124. *Dacă* f *e un sistem finit, atunci el are timp iniţial mărginit.*

DEMONSTRAŢIE. În proprietatea de existenţă a stării iniţiale cu timp iniţial nemărginit

$$\forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

fixăm un $u \in U$ arbitrar şi presupunem că $f(u) = \{x^1, ..., x^k\}$. Atunci există $\mu^1, ..., \mu^k \in \mathbf{B}^n$ şi $t_0^1, ..., t_0^k \in \mathbf{R}$ aşa încât

$$\forall t < t_0^1, x^1(t) = \mu^1, ..., \forall t < t_0^k, x^k(t) = \mu^k.$$

Pentru că numărul $t_0 = \min\{t_0^1, ..., t_0^k\}$ depinde doar de u, el satisface

$$\forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

Deoarece u a fost ales în mod arbitrar, concluzionăm că

$$\forall u \in U, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

□

TEOREMĂ 125. *Fie* f *determinist. Atunci el are stări iniţiale fără curse şi* ϕ_0 *satisface* $\forall u \in U, |\phi_0(u)| = 1$.

DEMONSTRAŢIE. În afirmaţia privitoare la existenţa valorilor iniţiale ale stărilor lui f avem

$$\forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu.$$

Din moment ce $\forall x \in f(u)$ şi $\exists \mu \in \mathbf{B}^n$ comută, f are stări iniţiale fără curse. Avem desigur

$$\forall u \in U, |\phi_0(u)| = |\{x(-\infty + 0) | x \in f(u)\}| = 1.$$

□

TEOREMĂ 126. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$ *cu* $f \subset g$. *Dacă* g *e finit, atunci* f *e finit de asemenea. Dacă* g *e determinist, atunci* f *e determinist de asemenea şi* $f = g$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru $\forall u \in U, f(u)$ are cel mult numărul de elemente al lui $g(u)$. Atunci când $\forall u \in V, g(u)$ are exact un element, $\forall u \in U, f(u)$ are exact un element şi $f(u) = g(u)$. □

TEOREMĂ 127. *Atunci când e adevărată axioma alegerii, orice sistem* $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $V \in P^*(S^{(m)})$ *include un sistem finit (determinist)* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$.

Demonstraţie. Luăm în mod arbitrar $U \subset V$ nevidă. Pentru orice $u \in U$, axioma alegerii ne permite să selectăm din mulţimea $g(u)$ un x şi să definim în acest mod, o funcţie selectivă $f(u) = \{x\}$. Sistemul f e determinist şi $\forall u \in U, f(u) \subset g(u)$. Reuniunea unui număr finit de astfel de sisteme deterministe $f_1, ..., f_k \subset g$ e un sistem finit $f_1 \cup ... \cup f_k \subset g$ cu domeniul de definiţie $U \cup ... \cup U = U$. □

Teoremă 128. *Dacă sistemul f e finit (determinist), atunci dualul său f^* e finit (determinist) de asemenea.*

Demonstraţie. Pentru orice $u \in U$, mulţimile finite $f^*(\overline{u}) = \{\overline{x} | x \in f(u)\}$ şi $f(u) = \{x | x \in f(u)\}$ au acelaşi număr de elemente. □

Teoremă 129. *Presupunem că sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$ sunt finite (deterministe). Atunci sistemul $f \times f'$ e finit (determinist) de asemenea.*

Demonstraţie. Aceasta decurge din egalitatea

$$\forall u \times u' \in U \times U', |(f \times f')(u \times u')| = |f(u) \times f'(u')| = |f(u)| \cdot |f'(u')|.$$

□

Teoremă 130. *Se dau sistemele finite (deterministe) $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $f_1' : U_1' \to P^*(S^{(n')})$, $U, U_1' \in P^*(S^{(m)})$ cu $U \cap U_1' \neq \emptyset$. Atunci sistemul (f, f_1') e finit (determinist).*

Teoremă 131. *Considerăm sistemele finite (deterministe) $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$ cu $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$. Avem că $h \circ f$ e finit (determinist).*

Demonstraţie. În formula

$$\forall u \in U, (h \circ f)(u) = \bigcup_{x \in f(u)} h(x)$$

reuniunea finită de mulţimi finite e o mulţime finită. □

Teoremă 132. *Dacă unul dintre sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$ e finit (determinist), atunci $\exists u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$ implică faptul că sistemul $f \cap g$ e finit (determinist); şi dacă ambele sisteme sunt finite, atunci $f \cup g$ e un sistem finit.*

Demonstraţie. Dacă f e finit, atunci $\forall u \in U \cap V$, mulţimea $(f \cap g)(u)$ are cel mult atâtea elemente ca şi $f(u)$, de unde deducem prima afirmaţie a teoremei. Dacă f, g sunt ambele finite, atunci $\forall u \in U \cup V$, $(f \cup g)(u)$ reprezintă o mulţime finită sau reuniunea a două mulţimi finite după cum $u \in U \setminus V, u \in V \setminus U$ sau $u \in U \cap V$. □

Teoremă 133. *Sistemul f e autonom şi finit (determinist) dacă şi numai dacă $\exists X \in P^*(S^{(n)})$ finit (cu un element) aşa încât $\forall u \in U, f(u) = X$.*

Demonstraţie. Evidentă. □

5. Sisteme combinaţionale ideale

NOTATIE 17. *Fie funcţia Booleană* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ *şi numărul* $d \in \mathbf{R}$. *Notăm cu* $F_d : S^{(m)} \to S^{(n)}$ *sistemul determinist definit în felul următor*

$$\forall u \in S^{(m)}, F_d(u)(t) = F(u(t-d)).$$

În cazul particular când $d = 0$ *scriem* F *în loc de* F_0.

OBSERVATIE 40. *Această notaţie a fost deja folosită sub forma: dacă* $F : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, $\forall \lambda \in \mathbf{B}$, $F(\lambda) = \overline{\lambda}$, *atunci* $F : S \to S$ *e sistemul*

$$\forall u \in S, \overline{u}(t) = F(u)(t) = F(u(t)) = \overline{u(t)},$$

în timp ce pentru $F : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{B}$, $\forall \lambda \in \mathbf{B}^2$, $F(\lambda) = \lambda_1 \cup \lambda_2$, *avem sistemul* $F : S^{(2)} \to S$,

$$\forall u \in S^{(2)}, (u_1 \cup u_2)(t) = F(u)(t) = F(u(t)) = u_1(t) \cup u_2(t)$$

etc.

DEFINITIE 54. *Sistemul determinist* $f : U \to S^{(n)}, U \in P^*(S^{(m)})$ *e numit* ***sistem combinaţional ideal*** *dacă există funcţia Booleană* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ *şi numărul* $d \in \mathbf{R}$ *aşa încât* $f \subset F_d$, *cu alte cuvinte dacă*

$$\forall u \in U, f(u)(t) = F_d(u)(t).$$

În acest caz spunem că f *e* ***generată de funcţia*** F *şi* F *se numeşte* ***funcţia generatoare*** *a lui* f. *Atunci când* $d \geq 0$, *acest parametru se numeşte* ***întârziere de transmitere a tranziţiilor***, *sau, pe scurt* ***întârziere*** *a lui* f *şi spunem de asemenea că* f ***are întârzierea*** d.

OBSERVATIE 41. *Sistemele combinaţionale ideale sunt acele funcţii univoce, la care correspondeţa între intrarea* u *şi starea* x *e dată de ecuaţia* $x(t) = F(u(t-d))$. *Ele sunt modelele circuitelor combinaţionale.*

În general, un sistem combinaţional ideal are mai multe funcţii generatoare şi mai mulţi parametri d *(de exemplu dacă* F *e constantă).*

Datorită determinismului său, un sistem combinaţional ideal are timp iniţial mărginit şi stări iniţiale fără curse. Mai mult, el satisface toate proprietăţile sistemelor finite din Secţiunea 4.

Nu e necesar în Definiţia 54 să cerem ca $d \geq 0$; *această proprietate e una de neanticipativitate.*

EXEMPLU 32. *Readucem în discuţie Exemplele 11, 12, 13 şi 15 din Capitolul 3. Acele pseudo-sisteme induc sisteme combinaţionale ideale, în sensul Definiţiei 54, cu funcţiile generatoare: identitatea* $1_{\mathbf{B}^m}$, *proiecţia* $\pi_j : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}$, $j \in \{1, ..., m\}$, *funcţia constantă* $\mu : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$, *plus cazul general. În Exemplul 31 a apărut derivata* $\partial F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^m$, $\forall \lambda \in \mathbf{B}^m$, $\partial F(\lambda) = (\partial_1 F(\lambda), ..., \partial_m F(\lambda))$ *funcţiei* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}$, *care a generat un sistem combinaţional ideal.*

TEOREMĂ 134. *Să considerăm* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ *şi* $d \in \mathbf{R}$. *Are loc*

$$\forall u \in S^{(m)}, F_d(u) = F(u \circ \tau^d) = F(u) \circ \tau^d.$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $u \in S^{(m)}$,

$$F(u \circ \tau^d)(t) = F((u \circ \tau^d)(t)) = F(u(t-d)) = F(u)(t-d) = (F(u) \circ \tau^d)(t).$$

□

TEOREMĂ 135. *Fie $f \subset F_d$ un sistem combinaţional ideal. Ecuaţia următoare*

$$\forall u \in U, \phi_0(u) = F(u(-\infty + 0))$$

e adevărată.

TEOREMĂ 136. *Un subsistem al unui sistem combinaţional ideal e combinaţional ideal.*

DEMONSTRAŢIE. Din $g \subset F_d$ şi $f \subset g$ deducem $f \subset F_d$. $\square$

TEOREMĂ 137. $(F^*)_d = (F_d)^*$

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $u \in S^{(m)}$ avem

$$(F^*)_d(u) = F^*(u \circ \tau^d) = \overline{F(\overline{u \circ \tau^d})} = \overline{F(\overline{u} \circ \tau^d)} = \overline{F_d(\overline{u})} = (F_d)^*(u).$$

$\square$

NOTATIE 18. *Teorema precedentă ne permite să folosim notaţia F_d^* pentru oricare dintre $(F^*)_d$ şi $(F_d)^*$.*

TEOREMĂ 138. *Dacă $f \subset F_d$, atunci $f^* \subset F_d^*$.*

DEMONSTRAŢIE. Ipoteza afirmă că $f : U \to S^{(n)}$ satisface $\forall u \in U, f(u) = F_d(u)$ de unde $\forall u \in U^*, f^*(u) = \overline{f(\overline{u})} = \overline{F_d(\overline{u})} = F_d^*(u)$. $\square$

TEOREMĂ 139. *Inversul sistemului $F_d : S^{(m)} \to S^{(n)}$ satisface*

$$\forall x \in S^{(n)}, (F_d)^{-1}(x) = F^{-1}(x \circ \tau^{-d}).$$

DEMONSTRAŢIE. În egalitatea

$$F(u(t - d)) = x(t),$$

în care $u \in S^{(m)}, x \in S^{(n)}$, facem substituţia $t' = t - d$ şi obţinem

$$F(u(t')) = x(t' + d) = (x \circ \tau^{-d})(t').$$

Aşadar

$$\forall x \in S^{(n)}, (F_d)^{-1}(x) = \{u | u \in S^{(m)}, F_d(u) = x\} =$$
$$= \{u | u \in S^{(m)}, F(u) = x \circ \tau^{-d}\} = F^{-1}(x \circ \tau^{-d}).$$

$\square$

TEOREMĂ 140. *Fie $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$, $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$, $F' : \mathbf{B}^{m'} \to \mathbf{B}^{n'}$ şi $d \in \mathbf{R}$. Dacă $f \subset F_d, f' \subset F'_d$, atunci $f \times f' \subset (F \times F')_d$, unde am notat cu $F \times F' : \mathbf{B}^m \times \mathbf{B}^{m'} \to \mathbf{B}^n \times \mathbf{B}^{n'}$ funcţia*

$$\forall (\lambda, \lambda') \in \mathbf{B}^m \times \mathbf{B}^{m'}, (F \times F')(\lambda, \lambda') = (F(\lambda), F'(\lambda')).$$

DEMONSTRAŢIE. Faptul că $f \times f' \subset F_d \times F'_d$ decurge din Teorema 63 şi în continuare avem

$$\forall u \times u' \in S^{(m)} \times S^{(m')}, (F_d \times F'_d)(u \times u') = F_d(u) \times F'_d(u') = F(u \circ \tau^d) \times F'(u' \circ \tau^d) =$$
$$= (F \times F')(u \circ \tau^d \times u' \circ \tau^d) = (F \times F')((u \times u') \circ \tau^d) = (F \times F')_d(u \times u').$$

$\square$

TEOREMĂ 141. *Se dau sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $f_1' : U_1' \to P^*(S^{(n')})$, $U, U_1' \in P^*(S^{(m)})$ *cu proprietatea că* $U \cap U_1' \neq \emptyset$ *şi de asemenea se dau funcţiile Boolene* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$, $F_1' : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^{n'}$ *şi numărul* $d \in \mathbf{R}$. *Dacă* $f \subset F_d$, $f_1' \subset F_{1d}'$, *atunci* $(f, f_1') \subset (F, F_1')_d$, *unde am folosit notaţia* $(F, F_1') : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n \times \mathbf{B}^{n'}$ *pentru funcţia*

$$\forall \lambda \in \mathbf{B}^m, (F, F_1')(\lambda) = (F(\lambda), F_1'(\lambda)).$$

TEOREMĂ 142. *Pentru funcţiile* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$, $H : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^p$ *şi numerele* $d \in \mathbf{R}$, $d' \in \mathbf{R}$ *e adevărată următoarea proprietate*

$$H_{d'} \circ F_d = (H \circ F)_{d+d'}$$

în care $H \circ F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^p$ *e compunerea uzuală a funcţiilor.*

DEMONSTRAŢIE. Remarcăm mai întâi că suportul lui $H_{d'}$ e $S^{(n)}$, deci $H_{d'} \circ F_d$ e definit. Ţinând cont de Teorema 134, se vede că $\forall u \in S^{(m)}$ avem

$$(H_{d'} \circ F_d)(u) = H_{d'}(F_d(u)) = H_{d'}(F(u \circ \tau^d)) = H_{d'}(F(u) \circ \tau^d) = H(F(u) \circ \tau^d \circ \tau^{d'}) =$$

$$= H(F(u) \circ \tau^{d+d'}) = H(F(u)) \circ \tau^{d+d'} = (H \circ F)(u) \circ \tau^{d+d'} = (H \circ F)_{d+d'}(u).$$

□

TEOREMĂ 143. *Se dau sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$ *şi cerem ca* $\bigcup_{u \in U} f(u) \subset X$ *să aibe loc. Fie de asemenea funcţiile* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$, $H : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^p$ *şi numerele* $d \in \mathbf{R}$, $d' \in \mathbf{R}$. *Dacă* $f \subset F_d$ *şi* $h \subset H_{d'}$, *atunci* $h \circ f \subset (H \circ F)_{d+d'}$.

DEMONSTRAŢIE. Deducem

$$\begin{aligned} h \circ f &\subset h \circ F_d \text{ (Teorema 74, a))} \\ &\subset H_{d'} \circ F_d \text{ (Teorema 74, b))} \\ &= (H \circ F)_{d+d'} \text{ (Teorema 142).} \end{aligned}$$

□

TEOREMĂ 144. *Considerăm sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$ *şi* $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$ *care satisfac* $f \subset F_d, g \subset F_d$.

a) Dacă $U \cap V \neq \emptyset$, *atunci* $f \cap g$ *există şi* $f \cap g \subset F_d$.

b) $f \cup g \subset F_d$.

OBSERVATIE 42. *Morfismele care caracterizează sistemele combinaţionale ideale sunt acelea care satisfac comutativitatea diagramelor*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & S^{(n)} \\ \omega \downarrow & & \downarrow 1_{S^{(n)}} \\ S^{(m)} & \xrightarrow{F_d} & S^{(n)} \end{array}$$

în care ω *e injecţia canonică.*

Autonomia acestor sisteme e dată, de exemplu, de funcţiile Boolene constante.

6. Auto-dualitate

DEFINITIE 55. *Funcţia Booleană* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ *e numită* ***auto-duală*** *dacă are loc*

$$\forall \lambda \in \mathbf{B}^m, F(\lambda) = F^*(\lambda).$$

EXEMPLU 33. *Cele două funcţii* $F : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *auto-duale sunt* $F(\lambda) = \lambda$ *şi* $F(\lambda) = \overline{\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{B}$ *iar cele patru funcţii* $F : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{B}$ *auto-duale sunt:* $F(\lambda) = \lambda_1$, $F(\lambda) = \overline{\lambda_1}$, $F(\lambda) = \lambda_2$, $F(\lambda) = \overline{\lambda_2}$, $\lambda \in \mathbf{B}^2$. *Funcţia* $F : \mathbf{B}^3 \to \mathbf{B}$, $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3$ *e auto-duală şi ea.*

DEFINITIE 56. *Mulţimea* U *e numită* ***auto-duală*** *dacă satisface una din condiţiile echivalente:*

a) $U = U^*$;

b) $\forall u, u \in U \Longrightarrow \overline{u} \in U$.

EXEMPLU 34. *Mulţimea* $S^{(m)}$ *e auto-duală.*

EXEMPLU 35. *Fie* $j \in \{1, ..., m\}$ *şi* $\delta \geq 0$ *fixate. Mulţimea*

$$U = \{u | u \in S^{(m)},\ \overline{u_j(t-0)} \cdot u_j(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta]} u_j(\xi),\ u_j(t-0) \cdot \overline{u_j(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta]} \overline{u_j(\xi)}\}$$

e auto-duală.

LEMĂ 1. *Considerăm sistemul* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $f = f^*$;

b) $U = U^*$ *şi* $\forall u \in U, \forall x \in f(u), \overline{x} \in f(\overline{u})$;

c) $U = U^*$ *şi* $\forall u \in U, f(\overline{u}) = \{\overline{x} | x \in f(u)\}$;

d) $U = U^*$ *şi diagrama*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & P^*(S^{(n)}) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \Omega \\ U & \xrightarrow{f} & P^*(S^{(n)}) \end{array}$$

e comutativă, unde am notat

$$\forall u \in U, \omega(u) = \overline{u},$$

$$\forall X \in P^*(S^{(n)}), \Omega(X) = X^*,$$

i.e. $(\omega, \Omega) : f \to f$ *e morfism de sisteme.*

DEMONSTRAŢIE. *a)* $\Longrightarrow$ *b)* $U = U^*$ e adevărată şi, pe de altă parte are loc $\forall u \in U, \forall x \in f(u), x \in \{\overline{y} | y \in f(\overline{u})\} = \{y | \overline{y} \in f(\overline{u})\}$.

b) $\Longrightarrow$ *c)* $\forall u \in U, \forall x \in f(\overline{u}), \overline{x} \in f(u)$, deci $f(\overline{u}) = \{x | x \in f(\overline{u})\} \subset \{x | \overline{x} \in f(u)\} = \{\overline{x} | x \in f(u)\}$. Invers, $\forall u \in U, \forall x \in f(u)$ obţinem $\overline{x} \in f(\overline{u})$, aşadar $\{\overline{x} | x \in f(u)\} \subset f(\overline{u})$.

c) $\Longrightarrow$ *d)* e evidentă.

d) $\Longrightarrow$ *a)* $\forall u \in U, f(\overline{u}) = f(\omega(u)) = (f \circ \omega)(u) = (\Omega \circ f)(u) = \Omega(f(u)) = \{\overline{x} | x \in f(u)\}$, cu alte cuvinte $\forall u \in U, f(u) = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} = f^*(u)$. □

DEFINITIE 57. *Spunem despre sistemul* f *că e* ***auto-dual*** *dacă are loc una din proprietăţile echivalente anterioare a),...,d).*

OBSERVATIE 43. *Auto-dualitatea lui f afirmă că forma lui x sub intrarea u coincide cu forma lui $\overline{x}$ sub intrarea $\overline{u}$ şi în timp ce $x(t)$ comută la momentul de timp t în sens crescător (descrescător), $\overline{x}(t)$ comută la acelaşi moment de timp t în sens descrescător (crescător): $\forall u \in U, \forall x \in f(u), \forall i \in \{1, ..., n\}$,*

$$\overline{x_i(t-0)} \cdot x_i(t) = \overline{x_i(t-0)} \cdot \overline{\overline{x_i(t)}},\ x_i(t-0) \cdot \overline{x_i(t)} = \overline{\overline{x_i(t-0)}} \cdot \overline{x_i(t)}.$$

EXEMPLU 36. *Fie $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ o funcţie auto-duală şi $d \in \mathbf{R}$. Sistemul combinaţional ideal $F_d : S^{(m)} \to S^{(n)}$ e auto-dual.*

EXEMPLU 37. *Sistemul $S^{(2)} \to S$ definit prin următoarea inegalitate*

$$u_1(t) \cdot u_2(t) \le x(t) \le u_1(t) \cup u_2(t)$$

e auto-dual. Aceasta se vede uşor din Lema 1, b): dacă x satisface inegalitatea, atunci $\overline{x}$ satisface

$$\overline{u_1(t)} \cdot \overline{u_2(t)} \le \overline{x(t)} \le \overline{u_1(t)} \cup \overline{u_2(t)}.$$

EXEMPLU 38. *Sistemul $S \to P^*(S)$,*

$$\bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m]} u(\xi) \le x(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-d, t-d+m]} u(\xi)$$

e auto-dual, unde $0 \le m \le d$. Ca mai înainte, aceasta se vede din Lema 1, b): dacă x satisface inegalitatea, atunci $\overline{x}$ satisface următoarea inegalitate

$$\bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m]} \overline{u(\xi)} \le \overline{x(t)} \le \bigcup_{\xi \in [t-d, t-d+m]} \overline{u(\xi)}.$$

TEOREMĂ 145. *Dacă f e auto-dual, atunci $\phi_0 = \phi_0^*$ şi $\Theta_0 = \Theta_0^*$, unde am notat cu ϕ_0^*, Θ_0^* funcţia stare iniţială şi mulţimea stărilor iniţiale ale lui f^*.*

DEMONSTRAŢIE. Avem $U = U^*$ şi $\forall u \in U$,

$$\phi_0(u) = \{x(-\infty + 0) | x \in f(u)\} = \{x(-\infty + 0) | x \in f^*(u)\} = \phi_0^*(u).$$

□

TEOREMĂ 146. *Dacă f e auto-dual, atunci f^* e auto-dual.*

DEMONSTRAŢIE. Din $U = U^*$ obţinem $U^* = (U^*)^*$ şi din $f = f^*$ deducem $f^* = (f^*)^*$. □

TEOREMĂ 147. *Dacă f e auto-dual, atunci f^{-1} e auto-dual de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Notăm cu $X = \bigcup_{u \in U} f(u)$ mulţimea suport a lui f^{-1}. Demonstrăm că X e auto-dual: $\forall x$,

$$x \in \bigcup_{u \in U} f(u) \Longrightarrow \exists u \in U, x \in f(u) \Longrightarrow \exists \overline{u} \in U, x \in f(u) \Longrightarrow \exists u \in U, x \in f(\overline{u}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists u \in U, \overline{x} \in f^*(u) \Longrightarrow \exists u \in U, \overline{x} \in f(u) \Longrightarrow \overline{x} \in \bigcup_{u \in U} f(u).$$

Pentru orice $x \in X$ avem

$$(f^{-1})(x) = (f^*)^{-1}(x) = (f^{-1})^*(x)$$

şi am folosit Teorema 55. □

TEOREMĂ 148. *Dacă sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ *şi* $f' : U' \to P^*(S^{(n')}), U' \in P^*(S^{(m')})$ *sunt auto-duale, atunci sistemul* $f \times f'$ *e auto-dual de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm că $U \times U'$ e o mulţime auto-duală

$$U \times U' = \{u \times u' | u \in U, u' \in U'\} = \{u \times u' | \overline{u} \in U, \overline{u'} \in U'\} =$$
$$= \{\overline{u} \times \overline{u'} | u \in U, u' \in U'\} = \{\overline{u \times u'} | u \in U, u' \in U'\} = (U \times U')^*.$$

Mai departe

$$\forall u \times u' \in U \times U', (f \times f')(u \times u') = (f^* \times f'^*)(u \times u') = (f \times f')^*(u \times u')$$

şi, în ultima egalitate, am folosit Teorema 64. □

TEOREMĂ 149. *Presupunem că sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $f_1' : U_1' \to P^*(S^{(n')}), U, U_1' \in P^*(S^{(m)})$ *sunt auto-duale şi că* $U \cap U_1' \neq \emptyset$. *Atunci legarea în paralel* (f, f_1') *e auto-duală.*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm că $U \cap U'$ e auto-duală

$$U \cap U' = \{u | u \in U \text{ si } u \in U'\} = \{u | \overline{u} \in U \ si \ \overline{u} \in U'\} =$$
$$= \{\overline{u} | u \in U \ si \ u \in U'\} = \{\overline{u} | u \in U \cap U'\} = (U \cap U')^*$$

etc. □

TEOREMĂ 150. *Fie sistemele auto-duale* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ *şi* $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$. *Dacă* $\bigcup_{u \in U} f(u) \subset X$, *atunci sistemul* $h \circ f$ *e auto-dual.*

DEMONSTRAŢIE. Din ipoteză $U = U^*$. Mai departe, prin Teorema 75 avem că

$$\forall u \in U, (h \circ f)(u) = (h^* \circ f^*)(u) = (h \circ f)^*(u).$$

□

TEOREMĂ 151. *Considerăm sistemele auto-duale* $f : U \to P^*(S^{(n)})$ *şi* $g : V \to P^*(S^{(n)})$, *unde* $U, V \in P^*(S^{(m)})$. *Dacă mulţimea*

$$W = \{u | u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}$$

e nevidă, atunci sistemul $f \cap g$ *e auto-dual.*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm că W e auto-duală. Într-adevăr,

$$W = \{u | u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\} = \{\overline{u} | \overline{u} \in U \cap V, f(\overline{u}) \cap g(\overline{u}) \neq \emptyset\} =$$
$$= \{\overline{u} | \overline{u} \in U \ si \ \overline{u} \in V \ si \ f^*(\overline{u}) \cap g^*(\overline{u}) \neq \emptyset\} =$$
$$= \{\overline{u} | u \in U \ si \ u \in V \ si \ \{\overline{x} | x \in f(u)\} \cap \{\overline{x} | x \in g(u)\} \neq \emptyset\} =$$
$$= \{\overline{u} | u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\} = W^*.$$

Sistemul $f \cap g$ e auto-dual deoarece

$$\forall u \in W, (f \cap g)(u) = (f^* \cap g^*)(u) = (f \cap g)^*(u).$$

Am folosit Teorema 88. □

TEOREMĂ 152. *Dacă sistemele* f, g *sunt auto-duale, atunci* $f \cup g$ *e auto-dual de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Observăm că $U \cup V$ e auto-dual, apoi aplicăm Teorema 101. $\square$

OBSERVATIE 44. *Sistemul autonom $f = X$ e auto-dual dacă şi numai dacă U, X sunt ambele auto-duale. Dacă utilizăm Definiţia 51, b) a autonomiei, atunci sisteme autonome auto-duale nu există deoarece e imposibil ca U cu $|U| = 1$ să satisfacă $U = U^*$. Definiţia 51, c) a autonomiei dă sistemele autonome auto-duale ca fiind acelea care satisfac $X = X^*$.*

7. Simetria

NOTATIE 19. *Fie $S(\{1,...,m\})$ notaţia grupului simetric al mulţimii $\{1,...,m\}$. Elementele sale sunt bijecţiile (permutările) $\sigma : \{1,...,m\} \to \{1,...,m\}$.*

NOTATIE 20. *Fie bijecţia $\sigma \in S(\{1,...,m\})$. Pentru fiecare $\lambda \in \mathbf{B}^m$, $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m)$ notăm cu $\lambda_\sigma \in \mathbf{B}^m$ vectorul $\lambda_\sigma = (\lambda_{\sigma(1)},...,\lambda_{\sigma(m)})$.*

DEFINITIE 58. *Funcţia Booleană $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ e numită **simetrică** dacă pentru fiecare bijecţie σ avem*

$$\forall \lambda \in \mathbf{B}^m, F(\lambda) = F(\lambda_\sigma)$$

*şi **asimetrică** în caz contrar.*

NOTATIE 21. *Pentru fiecare funcţie bijectivă $\sigma \in S(\{1,...,m\})$ şi orice $u \in S^{(m)}$ notăm cu $u_\sigma \in S^{(m)}$ funcţia $u_\sigma = (u_{\sigma(1)},...,u_{\sigma(m)})$.*

DEFINITIE 59. *Mulţimea $U \in P^*(S^{(m)})$ e numită **invariantă la permutări** dacă pentru orice bijecţie σ avem*

$$\forall u, u \in U \Longrightarrow u_\sigma \in U.$$

EXEMPLU 39. *Mulţimile $U \in P^*(S)$ sunt invariante la permutări şi $S^{(m)}$ are aceeaşi proprietate.*

DEFINITIE 60. *Sistemul f e numit **simetric** dacă U e invariantă la permutări şi pentru orice $\sigma \in S(\{1,...,m\})$ avem $\forall u \in U, f(u) = f(u_\sigma)$. Altfel e numit **asimetric**.*

OBSERVATIE 45. *Naturaleţea acestei definiţii decurge din aceea că toate porţile logice simple: NU, ŞI, SAU etc sunt simetrice (relativ la intrări) şi modelele lor pot avea aceeşi proprietate.*

EXEMPLU 40. *Sistemele autonome sunt simetrice ori de câte ori mulţimea intrărilor lor e invariantă la permutări.*

EXEMPLU 41. *Toate sistemele cu $m = 1$ sunt simetrice.*

EXEMPLU 42. *Dacă $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ e o funcţie simetrică şi $d \in \mathbf{R}$ e un număr arbitrar, atunci sistemul combinaţional ideal $F_d : S^{(m)} \to S^{(n)}$ e simetric (reamintim că mulţimea $S^{(m)}$ e invariantă la permutări).*

EXEMPLU 43. *Sistemul $f : S^{(m)} \to P^*(S)$ dat de*

$$\forall u \in S^{(m)}, f(u) = \{x | x(t) \geq u_1(t) \cdot ... \cdot u_m(t)\}$$

e simetric.

EXEMPLU 44. *Sistemul $S^{(m)} \to P^*(S)$*

$$\bigcap_{\xi \in [t-d,t)} (u_1(\xi) \cdot ... \cdot u_m(\xi)) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d,t)} (u_1(\xi) \cup ... \cup u_m(\xi))$$

cu $d > 0$ e simetric.

TEOREMĂ 153. *Fie f un sistem simetric. Atunci pentru orice bijecţie $\sigma \in S(\{1,...,m\})$, funcţia stare iniţială ϕ_0 îndeplineşte*

$$\forall u \in U, \phi_0(u) = \phi_0(u_\sigma).$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $\sigma \in S(\{1,...,m\})$ şi orice $u \in U$ avem

$$\phi_0(u) = \{x(-\infty + 0) | x \in f(u)\} = \{x(-\infty + 0) | x \in f(u_\sigma)\} = \phi_0(u_\sigma).$$

□

TEOREMĂ 154. *Dacă f e simetric, atunci f^* are aceeaşi proprietate.*

DEMONSTRAŢIE. Prin ipoteză, U e invariantă la permutări şi arătăm că U^* e invariantă la permutări. Într-adevăr, pentru orice bijecţie σ şi orice intrare u avem

$$u \in U^* \Longrightarrow \overline{u} \in U \Longrightarrow \overline{u}_\sigma \in U \Longrightarrow \overline{u_\sigma} \in U \Longrightarrow u_\sigma \in U^*.$$

Mai departe, $\forall \sigma \in S(\{1,...,m\})$, $\forall u \in U^*$

$$f^*(u) = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u}_\sigma)\} = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u_\sigma})\} = f^*(u_\sigma).$$

□

TEOREMĂ 155. *Fie $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ un sistem simetric. Sistemul invers $f^{-1} : X \to P^*(S^{(m)})$, $X = \{x | \exists u \in U, x \in f(u)\}$ satisface proprietatea că $\forall x \in X, f^{-1}(x)$ e invariantă la permutări.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice bijecţie $\sigma \in S(\{1,...,m\})$ şi orice $x \in X$ avem

$$u \in f^{-1}(x) \Longrightarrow u \in U \text{ si } x \in f(u) \Longrightarrow u_\sigma \in U \text{ si } x \in f(u_\sigma) \Longrightarrow u_\sigma \in f^{-1}(x).$$

□

OBSERVATIE 46. *În general produsul cartezian de sisteme simetrice nu e un sistem simetric. De fapt, dacă mulţimile suport U, U' ale lui f, f' sunt invariante la permutări, nu putem spune dacă $U \times U'$ este sau nu invariantă la permutări.*

TEOREMĂ 156. *Să presupunem că sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $f_1' : U_1' \to P^*(S^{(n')})$, $U, U_1' \in P^*(S^{(m)})$ sunt simetrice şi $U \cap U_1' \neq \emptyset$. Atunci legarea lor în paralel (f, f_1') e simetrică.*

DEMONSTRAŢIE. Fie permutarea $\sigma \in S(\{1,...,m\})$ şi intrarea $u \in U \cap U_1'$. Faptul că $u_\sigma \in U, u_\sigma \in U_1'$ sunt ambele adevărate implică $u_\sigma \in U \cap U_1'$, aşadar $U \cap U_1'$ e invariantă la permutări. Mai mult,

$$\forall u \in U \cap U_1', (f, f_1')(u) = \{x \times x' | x \in f(u), x' \in f_1'(u)\} =$$

$$= \{x \times x' | x \in f(u_\sigma), x' \in f_1'(u_\sigma)\} = (f, f_1')(u_\sigma).$$

□

TEOREMĂ 157. *Cerem ca sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ şi $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$ să îndeplinească condiţia $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$. Dacă f e simetric, atunci legarea în serie $h \circ f$ e şi ea un sistem simetric.*

DEMONSTRAŢIE. Mulţimea U e invariantă la permutări. Pentru orice $\sigma \in S(\{1,...,n\})$ şi orice $u \in U$ avem

$$(h \circ f)(u) = \bigcup_{x \in f(u)} h(x) = \bigcup_{x \in f(u_\sigma)} h(x) = (h \circ f)(u_\sigma).$$

□

TEOREMĂ 158. *Fie sistemele simetrice $f : U \to P^*(S^{(n)})$ şi $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$. Dacă mulţimea $W = \{u | u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}$ e nevidă, atunci $f \cap g$ e simetric.*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm că W e invariantă la permutări. Fie bijecţia $\sigma \in S(\{1,...,m\})$. Pentru orice $u \in W$ avem $u \in U \cap V$ şi $f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, deci $u_\sigma \in U \cap V$ şi $f(u_\sigma) \cap g(u_\sigma) \neq \emptyset$ şi, în cele din urmă, $u_\sigma \in W$. Obţinem

$$(f \cap g)(u) = f(u) \cap g(u) = f(u_\sigma) \cap g(u_\sigma) = (f \cap g)(u_\sigma).$$

□

TEOREMĂ 159. *Reuniunea sistemelor simetrice e simetrică.*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm că $U \cup V$ e invariantă la permutări. Pentru bijecţia $\sigma \in S(\{1,...,m\})$ şi $u \in U \cup V$, dacă $u \in U$ atunci $u_\sigma \in U$, deci $u_\sigma \in U \cup V$ etc. □

TEOREMĂ 160. *Pentru sistemul f următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) f e auto-dual şi simetric;

b) pentru orice bijecţie $\sigma \in S(\{1,...,m\})$ şi orice $u \in U$ avem $\overline{u}_\sigma \in U$ şi, mai departe, pentru orice bijecţie σ, orice intrare $u \in U$ şi orice stare x, $x \in f(u) \Longrightarrow \overline{x} \in f(\overline{u}_\sigma)$.

DEMONSTRAŢIE. Să luăm o bijecţie arbitrară $\sigma \in S(\{1,...,m\})$ şi o intrare arbitrară $u \in U$.

a) $\Longrightarrow$ *b)* U e auto-duală ceea ce arată că $\overline{u} \in U$ şi faptul că U e invariantă la permutări implică că $\overline{u}_\sigma \in U$. Fie un $x \in f(u)$ arbitrar. Sistemul f e auto-dual aşadar $\overline{x} \in f(\overline{u})$ şi faptul că f e simetric arată că $f(\overline{u}) = f(\overline{u}_\sigma)$, deci am obţinut $\overline{x} \in f(\overline{u}_\sigma)$.

b) $\Longrightarrow$ *a)* Relaţia $\overline{u} \in U$ e adevărată pentru bijecţia identică $1_{\{1,...,m\}}$, deci U e auto-duală. Pentru bijecţia identică avem de asemenea $\forall x, x \in f(u) \Longrightarrow \overline{x} \in f(\overline{u})$ arătând că f e auto-duală. Pentru că $\overline{u} \in U$ e adevărată şi deducem $u_\sigma \in U$, avem că U e invariantă la permutări. Din $\forall x, x \in f(u) \Longrightarrow \overline{x} \in f(\overline{u}_\sigma)$, $\overline{x} \in f(\overline{u}_\sigma) \Longrightarrow x \in f(u_\sigma)$ obţinem că $\forall x, x \in f(u) \Longrightarrow x \in f(u_\sigma)$ rezultând $f(u) \subset f(u_\sigma)$. Incluziunea inversă se arată astfel: $f(u_\sigma) \subset f((u_\sigma)_{\sigma^{-1}}) = f(u)$, cu alte cuvinte $f(u) = f(u_\sigma)$, deci f e simetric. □

8. Invarianţa în timp

DEFINITIE 61. *Mulţimea $U \subset S^{(m)}$ e numită **invariantă la translaţii** dacă îndeplineşte*

$$\forall d \in \mathbf{R}, \forall u, u \in U \Longrightarrow u \circ \tau^d \in U.$$

EXEMPLU 45. *Mulţimea $U = S^{(m)}$ e invariantă la translaţii.*

EXEMPLU 46. *Mulţimea $U = \{u | u \in S^{(m)}, u_1, ..., u_m$ sunt monotone$\}$ e invariantă la translaţii.*

EXEMPLU 47. *Fie U mulţimea semnalelor $u \in S^{(m)}$ care satisfac, pentru nişte $\delta_r > 0, \delta_f > 0$, proprietăţile $\forall j \in \{1, ..., m\}$,*

$$\overline{u_j(t-0)} \cdot u_j(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r]} u_j(\xi),$$

$$u_j(t-0) \cdot \overline{u_j(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_f]} \overline{u_j(\xi)}.$$

Mulţimea U e invariantă la translaţii.

LEMĂ 2. *Fie sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)})$ pentru care mulţimea $U \in P^*(S^{(m)})$ e invariantă la translaţii. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall x \in f(u), x \circ \tau^d \in f(u \circ \tau^d)$;

b) $\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in U, f(u \circ \tau^d) = \{x \circ \tau^d | x \in f(u)\}$;

c) pentru orice $d \in \mathbf{R}$, diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & P^*(S^{(n)}) \\ \omega_d \downarrow & & \downarrow \Omega_d \\ U & \xrightarrow{f} & P^*(S^{(n)}) \end{array}$$

e comutativă, i.e. $(\omega_d, \Omega_d) : f \to f$ e un morfism de sisteme. Am notat

$$\omega_d : U \to U, \forall u \in U, \omega_d(u) = u \circ \tau^d,$$

$$\Omega_d : P^*(S^{(n)}) \to P^*(S^{(n)}), \forall X \in P^*(S^{(n)}), \Omega_d(X) = \{x \circ \tau^d | x \in X\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $d \in \mathbf{R}$ şi $u \in U$ alese în mod arbitrar.

a) $\Longrightarrow$ *b)* Din faptul că $x \in f(u)$ implică $x \circ \tau^d \in f(u \circ \tau^d)$, avem $\{x \circ \tau^d | x \in f(u)\} \subset f(u \circ \tau^d)$. Luăm un $y \in f(u \circ \tau^d)$. Pentru că $y \circ \tau^{-d} \in f(u)$, obţinem $f(u \circ \tau^d) \subset \{y | y \circ \tau^{-d} \in f(u)\}$. Din

$$\{x \circ \tau^d | x \in f(u)\} \subset f(u \circ \tau^d) \subset \{y | y \circ \tau^{-d} \in f(u)\} = \{x \circ \tau^d | x \in f(u)\}$$

deducem b).

b) $\Longrightarrow$ *a)* Dacă $x \in f(u)$, atunci $x \circ \tau^d \in f(u \circ \tau^d)$, cu alte cuvinte *a)* e adevărată.

b) $\Longrightarrow$ *c)* $(f \circ \omega_d)(u) = f(\omega_d(u)) = f(u \circ \tau^d) = \{x \circ \tau^d | x \in f(u)\} = \Omega_d(f(u)) = (\Omega_d \circ f)(u)$.

c) $\Longrightarrow$ *b)* $f(u \circ \tau^d) = f(\omega_d(u)) = (f \circ \omega_d)(u) = (\Omega_d \circ f)(u) = \Omega_d(f(u)) = \{x \circ \tau^d | x \in f(u)\}$. □

DEFINITIE 62. *Sistemul f e **invariant în timp** dacă U e invariantă la translaţii şi e îndeplinită una dintre condiţiile echivalente a), b), c) din Lema 2. Dacă f nu e invariant în timp, atunci spunem că el e **variabil în timp**.*

EXEMPLU 48. *Arătăm că sistemul $f : S^{(m)} \to S$ definit de $\forall u \in S^{(m)}, f(u) = u_j \circ \tau^{d'}$ e invariant în timp, unde $j \in \{1, ..., m\}$ şi $d' \in \mathbf{R}$. $S^{(m)}$ e invariantă la translaţii şi pentru $x = u_j \circ \tau^{d'}$ avem că*

$$\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in S^{(m)}, f(u \circ \tau^d) = (u \circ \tau^d)_j \circ \tau^{d'} = u_j \circ \tau^{d+d'} = (u_j \circ \tau^{d'}) \circ \tau^d = x \circ \tau^d.$$

EXEMPLU 49. *Mai general, orice sistem combinaţional ideal $F_{d'}$ e invariant în timp:*

$$\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in S^{(m)}, F_{d'}(u \circ \tau^d)(t) = F((u \circ \tau^d)(t-d')) = F(u(t-d-d')) =$$

$$= F_{d'}(u(t-d)) = F_{d'}(u)(t-d) = (F_{d'}(u) \circ \tau^d)(t).$$

EXEMPLU 50. *Fie sistemul* $f : S^{(m)} \to S$ *definit de ecuaţia*

$$x(t) = \lim_{\xi \to \infty} \bigcup_{\rho \in (\xi, \infty)} (u_1(\rho) \cdot ... \cdot u_m(\rho)). \tag{8.1}$$

Pe de o parte, pentru orice $u \in S^{(m)}$ *funcţia în* $\xi : \bigcup_{\rho \in (\xi,\infty)} (u_1(\rho) \cdot ... \cdot u_m(\rho))$ *comută cel mult o dată de la 1 la 0 atunci când* ξ *parcurge* $\mathbf{R}$ *în sens crescător. Aşadar limita* $\lim_{\xi \to \infty} \bigcup_{\rho \in (\xi,\infty)} (u_1(\rho) \cdot ... \cdot u_m(\rho))$ *există întotdeuna şi (8.1) defineşte un sistem într-adevăr. Pe de altă parte,* $S^{(m)}$ *e invariant la translaţii şi din aceea că pentru orice* $d \in \mathbf{R}$ *şi orice* $u \in S^{(m)}$ *avem*

$$f(u \circ \tau^d) = \lim_{\xi \to \infty} \bigcup_{\rho \in (\xi,\infty)} (u_1(\rho - d) \cdot ... \cdot u_m(\rho - d)) =$$

$$= \lim_{\xi \to \infty} \bigcup_{\rho \in (\xi,\infty)} (u_1(\rho) \cdot ... \cdot u_m(\rho)) = x = x \circ \tau^d,$$

se deduce că sistemul e invariant în timp.

EXEMPLU 51. *Sistemul* $f : S^{(m)} \to P^*(S)$ *definit de inegalitatea*

$$u_1(t - d') \cdot ... \cdot u_m(t - d') \leq x(t)$$

cu $d' \in \mathbf{R}$ *fixat e invariant în timp şi, pentru a vedea acest lucru, să luăm un* $u \in S^{(m)}$ *şi un* $d \in \mathbf{R}$*. Dacă* $x \in f(u)$*, atunci*

$$u_1(t - d - d') \cdot ... \cdot u_m(t - d - d') \leq x(t - d)$$

e evidentă, i.e. $x \circ \tau^d \in f(u \circ \tau^d)$*.*

EXEMPLU 52. *Sistemul* $f : S^{(m)} \to P^*(S)$ *definit de*

$$x(t) \leq u_1(t - d') \cup ... \cup u_m(t - d'),$$

cu $d' \in \mathbf{R}$*, e invariant în timp.*

TEOREMĂ 161. *Dacă sistemul* $f : U \to P^*(S^{(n)})$*,* $U \in P^*(S^{(m)})$ *e invariant în timp, atunci funcţia sa stare iniţială* $\phi_0 : U \to P^*(\mathbf{B}^n)$ *satisface*

$$\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \phi_0(u \circ \tau^d) = \phi_0(u).$$

DEMONSTRAŢIE. $\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in U,$

$$\phi_0(u \circ \tau^d) = \{x(-\infty + 0) | x \in f(u \circ \tau^d)\} = \{x(-\infty + 0) | x \in \{y \circ \tau^d | y \in f(u)\}\} =$$
$$= \{y \circ \tau^d(-\infty + 0) | y \in f(u)\} = \{y(-\infty + 0) | y \in f(u)\} = \phi_0(u).$$

□

TEOREMĂ 162. *Dacă* f *e invariant în timp cu stări iniţiale fără curse şi timp iniţial fix, atunci* $\forall u \in U, \forall x \in f(u), x$ *e funcţia constantă.*

DEMONSTRAŢIE. Există $t_0 \in \mathbf{R}$ aşa încât pentru orice $u \in U$ avem starea iniţială $\mu^0 \in \mathbf{B}^n$ cu $\forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu^0$. Pe de altă parte, pentru un $v \in U$, există $\mu'^0 \in \mathbf{B}^n$ cu $\forall y \in f(v), \forall t < t_0, y(t) = \mu'^0$. Pentru un $d \in \mathbf{R}$ arbitrar alegem $v = u \circ \tau^d$. Din $f(v) = f(u \circ \tau^d) = \{x \circ \tau^d | x \in f(u)\}$ deducem

$$\forall x \in f(u), \forall t < t_0, \mu^0 = x(t) = x(t - d) = \mu'^0$$

şi deoarece d e arbitrar obţinem că x e constant. □

TEOREMĂ 163. *Dacă* f *e invariant în timp, atunci* f^* *e invariant în timp.*

Demonstraţie. Mai întâi, să remarcăm că dacă U e invariant la translaţii, atunci U^* are aceeaşi proprietate: pentru orice $d \in \mathbf{R}$ şi orice u avem

$$u \in U^* \Longrightarrow \overline{u} \in U \Longrightarrow \overline{u} \circ \tau^d \in U \Longrightarrow \overline{u \circ \tau^d} \in U \Longrightarrow u \circ \tau^d \in U^*.$$

Mai departe, să luăm nişte $d \in \mathbf{R}$ şi $u \in U^*$ arbitrare. Putem scrie

$$f^*(u \circ \tau^d) = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u \circ \tau^d})\} = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u} \circ \tau^d)\} = \{\overline{x} | x \in \{y \circ \tau^d | y \in f(\overline{u})\}\} =$$
$$= \{\overline{y \circ \tau^d} | y \in f(\overline{u})\} = \{x \circ \tau^d | \overline{x} \in f(\overline{u})\} = \{x \circ \tau^d | x \in f^*(u)\},$$

aşadar f^* e invariant în timp. $\square$

Teoremă 164. *Presupunem că sistemul f e invariant în timp. Atunci $f^{-1} : X \to P^*(S^{(m)})$, unde $X = \bigcup_{u \in U} f(u) \subset S^{(n)}$, e invariant în timp.*

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi că X e invariant la translaţii. Fie $x \in X$, cu alte cuvinte există $u \in U$ aşa încât $x \in f(u)$. Pentru un $d \in \mathbf{R}$ arbitrar, din invarianţa lui U la translaţii, avem $u \circ \tau^d \in U$ în timp ce din invarianţa lui f, avem $x \circ \tau^d \in f(u \circ \tau^d)$. Deci $x \circ \tau^d \in X$.

Să arătăm acum că f^{-1} e invariant în timp. Luăm nişte d şi u, x arbitrare aşa încât $u \in f^{-1}(x)$. Aceasta însemnă că $u \in U$ şi $x \in f(u)$. Pentru că $u \circ \tau^d \in U$ şi $x \circ \tau^d \in f(u \circ \tau^d)$, avem $u \circ \tau^d \in f^{-1}(x \circ \tau^d)$. $\square$

Teoremă 165. *Produsul cartezian al sistemelor invariante în timp e un sistem invariant în timp.*

Demonstraţie. Considerăm sistemele invariante în timp $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ şi $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$. Fie $d \in \mathbf{R}$, $u \in U$, $u' \in U'$ arbitrare. Deducem

$$u \times u' \in U \times U' \Longrightarrow u \in U \text{ si } u' \in U' \Longrightarrow u \circ \tau^d \in U \text{ si } u' \circ \tau^d \in U' \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow u \circ \tau^d \times u' \circ \tau^d \in U \times U' \Longrightarrow (u \times u') \circ \tau^d \in U \times U'.$$

Deci $U \times U'$ e invariantă la translaţii. Pentru orice $d \in \mathbf{R}$ şi orice $u \times u' \in U \times U'$ obţinem

$$(f \times f')((u \times u') \circ \tau^d) = (f \times f')(u \circ \tau^d \times u' \circ \tau^d) = f(u \circ \tau^d) \times f'(u' \circ \tau^d) =$$
$$= \{y \times y' | y \in f(u \circ \tau^d), y' \in f'(u' \circ \tau^d)\} =$$
$$= \{y \times y' | y \in \{x \circ \tau^d | x \in f(u)\}, y' \in \{x' \circ \tau^d | x' \in f'(u')\}\} =$$
$$= \{x \circ \tau^d \times x' \circ \tau^d | x \in f(u), x' \in f'(u')\} = \{(x \times x') \circ \tau^d | (x \times x') \in (f \times f')(u \times u')\}.$$

$\square$

Teoremă 166. *Legarea în paralel a sistemelor invariante în timp e un sistem invariant în timp.*

Teoremă 167. *Să considerăm sistemele invariante în timp $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ şi $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$ aşa ca incluziunea $\bigcup_{u \in U} f(u) \subset X$ să aibe loc. Atunci prin legarea lor în serie $h \circ f : U \to P^*(S^{(p)})$ se obţine un sistem invariant în timp.*

Demonstraţie. Fie $d \in \mathbf{R}$, $u \in U$ şi $y \in (h \circ f)(u)$ arbitrare, ceea ce indică existenţa unui $x \in f(u)$ cu $y \in h(x)$. Avem $x \circ \tau^d \in f(u \circ \tau^d)$ şi $y \circ \tau^d \in h(x \circ \tau^d)$ din invarianţa în timp a lui f şi h, rezultând că $y \circ \tau^d \in (h \circ f)(u \circ \tau^d)$. $\square$

TEOREMĂ 168. *Fie sistemele invariante în timp* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$. *Dacă* $\exists u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, *atunci* $f \cap g$ *e invariant în timp.*

DEMONSTRAŢIE. Să notăm $W = \{u | u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}$ şi să arătăm că această mulţime e invariantă la translaţii. Fie $d \in \mathbf{R}$ şi $u \in W$, aşadar $u \in U \cap V$ şi $f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$. Luăm un $x \in f(u) \cap g(u)$. Din invarianţa lui U şi invarianţa lui V la translaţii deducem $u \circ \tau^d \in U \cap V$, iar din invarianţa în timp a lui f şi g rezultă $x \circ \tau^d \in f(u \circ \tau^d) \cap g(u \circ \tau^d)$. Deci $f(u \circ \tau^d) \cap g(u \circ \tau^d) \neq \emptyset$ şi $u \circ \tau^d \in W$.

Faptul că $x \in (f \cap g)(u) \Longrightarrow x \circ \tau^d \in (f \cap g)(u \circ \tau^d)$ a fost deja arătat. Concluzia e că $f \cap g$ e invariant în timp. □

TEOREMĂ 169. *Reuniunea sistemelor invariante în timp e invariantă în timp.*

OBSERVATIE 47. *Sistemele autonome invariante în timp au suportul* U *şi mulţimea* $X \in P^*(S^{(n)})$ *invariante la translaţii. Versiunea conceptului de autonomie din Definiţia 51 c) reţine doar cerinţa de invarianţă la translaţii a lui* X.

Următoarele două teoreme sunt similare Teoremei 160 şi demonstraţia lor se omite.

TEOREMĂ 170. *Pentru sistemul* f, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) f *e auto-dual şi invariant în timp;*

b) $\forall d \in \mathbf{R}, \forall u, u \in U \Longrightarrow \overline{u} \circ \tau^d \in U$ *şi, mai departe,* $\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall x, x \in f(u) \Longrightarrow \overline{x} \circ \tau^d \in f(\overline{u} \circ \tau^d)$.

TEOREMĂ 171. *Fie sistemul* f. *Următoarele proprietăţi sunt echivalente:*

a) f *e simetric şi invariant în timp;*

b) $\forall d \in \mathbf{R}$, *pentru orice bijecţie* $\sigma \in S(\{1, ..., m\}), \forall u, u \in U \Longrightarrow u_\sigma \circ \tau^d \in U$ *şi* $\forall d \in \mathbf{R}$, *pentru orice* $\sigma \in S(\{1, ..., m\}), \forall u \in U, \forall x, x \in f(u) \Longrightarrow x \circ \tau^d \in f(u_\sigma \circ \tau^d)$.

9. Neanticipativitate, prima definiţie

DEFINITIE 63. *Sistemul* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ *e* ***neanticipativ*** *dacă pentru toţi* $u \in U$ *şi toţi* $x \in f(u)$ *satisface una din următoarele afirmaţii:*

a) x *e constant;*

b) u, x *sunt ambele variabile şi avem*

$$\min\{t | u(t - 0) \neq u(t)\} \leq \min\{t | x(t - 0) \neq x(t)\}, \tag{9.1}$$

i.e. prima comutare a intrării e anterioară primei comutări a stării. Dacă f *nu îndeplineşte proprietatea anterioară, e numit* ***anticipativ***.

OBSERVATIE 48. *În* [**11**] *atributul 'dinamic' e considerat ca sinonim al lui 'neanticipativ' şi încă o altă terminologie identificată în literatură e aceea de sistem 'cauzal'. Putem însă privi sistemele dinamice ca reprezenzând un caz particular al sistemelor (asincrone) de care nu ne ocupăm în această carte şi cauzalitatea ca fiind proprietatea generală a sistemelor de dependenţă a efectelor de o cauză, situaţie în care ambele caracteristici sunt nelegate de intenţiile noastre din această secţiune. Din acest motiv noi vom utiliza doar noţiunea de neanticipativitate.*

Neanticipativitatea (Definiţia 63) înseamnă că sistemul f e în echilibru[2]*, aşa cum rezultă el prin existenţa intervalului de timp $(-\infty, t_0)$ în care u şi x sunt constante: $u_{|(-\infty,t_0)} = u(t_0 - 0)$ şi $x_{|(-\infty,t_0)} = x(t_0 - 0)$; atunci singura posibilitate de a depaşi această situaţie e comutarea intrării. Concluzionăm că pentru astfel de sisteme prima comutare trebuie să fie aceea a intrării şi doar după aceea poate urma prima comutare a stării*[3]*.*

EXEMPLU 53. *Sistemul f cu $\forall u \in U, \forall x \in f(u), x$ e funcţia constantă e neanticipativ.*

EXEMPLU 54. *Sistemul $\pi_j : S^{(m)} \to S$, $\forall u \in S^{(m)}$, $\pi_j(u_1, ..., u_j, ..., u_m) = u_j$, $j \in \{1, ..., m\}$ e neanticipativ, deoarece sau u_j e constant, sau u_j e variabil de unde rezultă că u e variabil. În acest din urmă caz avem*

$$\min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} \leq \min\{t|u_j(t-0) \neq u_j(t)\}.$$

EXEMPLU 55. *Exemplul anterior e generalizat prin afirmaţia că orice sistem combinaţional ideal F_d cu $d \geq 0$ e neanticipativ. Într-adevăr, pentru orice t_0, $u_{|(-\infty,t_0)} = u(t_0 - 0)$ implică $F_d(u)_{|(-\infty,t_0)} = F_d(u)(t_0 - 0)$ şi dacă $u(t_0 - 0) \neq u(t_0)$, atunci $F(u(t_0 - d - 0))$, $F(u(t_0 - d))$ reprezintă două valori care pot fi egale sau diferite.*

EXEMPLU 56. *Următorul sistem $S \to S$,*

$$x(t) = \bigcap_{\xi \in (-\infty, t]} u(\xi)$$

e neanticipativ deoarece pentru orice $u \in S$, sau x e constant, sau e variabil cu exact o comutare de pe 1 pe 0. În cel de-al doilea caz putem scrie

$$x(-\infty + 0) = u(-\infty + 0) = 1,$$

$$\min\{t|x(t-0) \neq x(t)\} = \min\{t|x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 1\} =$$
$$= \min\{t|u(t-0) \cdot \overline{u(t)} = 1\} = \min\{t|u(t-0) \neq u(t)\}.$$

EXEMPLU 57. *Sistemul $S \to S$,*

$$x(t) = \bigcup_{\xi \in [t, \infty)} u(\xi)$$

e neanticipativ.

EXERCITIU 2. *Să se analizeze din punctul de vedere al neanticipativităţii sistemul $f : S^{(2)} \to P^*(S)$ definit de dubla inegalitate*

$$u_1(t) \leq x(t) \leq u_1(t) \cup u_2(t)$$

în următoarele patru cazuri: a) $u_1(-\infty+0) = 0, u_2(-\infty+0) = 0$; b) $u_1(-\infty+0) = 1, u_2(-\infty+0) = 0$; c) $u_1(-\infty+0) = 0, u_2(-\infty+0) = 1$; d) $u_1(-\infty+0) = 1, u_2(-\infty+0) = 1$.

TEOREMĂ 172. *Dacă $g : V \to P^*(S^{(n)}), V \in P^*(S^{(m)})$ e un sistem neanticipativ, atunci orice sistem $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ cu $f \subset g$ e neanticipativ.*

---

[2]Moisil numeşte acest echilibru 'poziţie de repaus'; toate sistemele sale îşi pornesc evoluţia dintr-o poziţie de repaus, am dat un exemplu relevant în acest sens la pagina xii. Presupunerea existenţei unei poziţii de repaus 'simplifică considerabil argumentarea'. Dacă avem un circuit fără o astfel de poziţie, îl înlocuim cu un altul care o are, prin introducerea unei noi intrări: legarea la sursa de alimentare ([**22**], pagina 521).

[3]Moisil presupune implicit că modelele sale sunt neanticipative in sensul Definiţiei 63

DEMONSTRAŢIE. Fie $u \in U$. Avem următoarele posibilităţi:

i) u e constant. Din Definiţia 63 avem că $\forall x \in g(u), x$ e constant, în particular $\forall x \in f(u), x$ e constant. Aşadar, f e neanticipativ;

ii) u e variabil. Fie $x \in f(u)$ arbitrar. Atunci

ii.1) x constant implică faptul că f e neanticipativ, prin Definiţia 63 a);

ii.2) x e variabil. Ca element al lui $g(u), x$ satisface (9.1) şi, prin Definiţia 63 b), f e neanticipativ. □

TEOREMĂ 173. *Dacă f e un sistem neanticipativ, atunci dualul său f^* e un sistem neanticipativ de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $u \in U^*$ şi $x \in f^*(u)$ alese în mod arbitrar. Dacă x e constant, atunci f^* e neanticipativ, deci putem presupune că x e variabil, cu implicaţia că $\overline{x} \in f(\overline{u})$ e variabil. Prin Definiţia 63 b), avem că $\overline{u}$ e variabil şi

$$\min\{t|\overline{u}(t-0) \neq \overline{u}(t)\} = \min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} \leq$$

$$\leq \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\} = \min\{t|\overline{x}(t-0) \neq \overline{x}(t)\},$$

aşadar f^* e neanticipativ. □

TEOREMĂ 174. *Dacă $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ şi $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$ sunt sisteme neanticipative, atunci produsul lor cartezian e neanticipativ.*

DEMONSTRAŢIE. Ipoteza afirmă satisfacerea următoarelor proprietăţi

$$\forall u \in U, \forall x \in f(u), (x \textit{ e constant}) \textit{ sau}$$

$$\textit{sau } (u, x \textit{ sunt variabile si } \min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} \leq \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\}),$$

$$\forall u' \in U', \forall x' \in f'(u'), (x' \textit{ e constant}) \textit{ sau}$$

$$\textit{sau } (u', x' \textit{ sunt variabile si } \min\{t|u'(t-0) \neq u'(t)\} \leq \min\{t|x'(t-0) \neq x'(t)\}).$$

Pentru $u \in U$, $x \in f(u)$, $u' \in U'$, $x' \in f'(u')$ alese în mod arbitrar, prin conjucţia proprietăţilor de mai sus se obţine disjuncţia următoarelor patru afirmaţii:

a) x e constant şi x' e constant de unde $x \times x' \in (f \times f')(u \times u')$ e constant;

b) x e constant, u', x' sunt variabile şi $\min\{t|u'(t-0) \neq u'(t)\} \leq \min\{t|x'(t-0) \neq x'(t)\}$ de unde $u \times u'$ şi $x \times x' \in (f \times f')(u \times u')$ sunt variabile şi

$$\min\{t|(u \times u')(t-0) \neq (u \times u')(t)\} \leq \min\{t|u'(t-0) \neq u'(t)\} \leq$$

$$\leq \min\{t|x'(t-0) \neq x'(t)\} = \min\{t|(x \times x')(t-0) \neq (x \times x')(t)\};$$

c) u, x sunt variabile şi $\min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} \leq \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\}$ şi x' e constant. Similar cu b);

d) u, x sunt variabile şi $\min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} \leq \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\}$ şi u', x' sunt variabile şi $\min\{t|u'(t-0) \neq u'(t)\} \leq \min\{t|x'(t-0) \neq x'(t)\}$.

Deducem că $u \times u'$ şi $x \times x' \in (f \times f')(u \times u')$ sunt variabile şi

$$\min\{t|(u \times u')(t-0) \neq (u \times u')(t)\} =$$

$$= \min\{\min\{t|u(t-0) \neq u(t)\}, \min\{t|u'(t-0) \neq u'(t)\}\} \leq$$

$$\leq \min\{\min\{t|x(t-0) \neq x(t)\}, \min\{t|x'(t-0) \neq x'(t)\}\} =$$

$$= \min\{t|(x \times x')(t-0) \neq (x \times x')(t)\}.$$

Am arătat că $f \times f'$ e neanticipativ în toate cele patru cazuri a),...,d). □

TEOREMĂ 175. *Dacă* $f : U \to P^*(S^{(n)})$ *şi* $f_1' : U_1' \to P^*(S^{(n')})$, $U, U_1' \in P^*(S^{(m)})$ *sunt sisteme neanticipative şi* $U \cap U_1' \neq \emptyset$, *atunci legarea lor în paralel e şi ea neanticipativă.*

DEMONSTRAŢIE. Ipoteza afirmă conjuncţia afirmaţiilor

$$\forall u \in U \cap U_1', \forall x \in f(u), (x \text{ e constant}) \text{ sau}$$

$$\text{sau } (u, x \text{ sunt variabile si } \min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} \leq \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\}),$$

$$\forall u \in U \cap U_1', \forall x' \in f_1'(u), (x' \text{ e constant}) \text{ sau}$$

$$\text{sau } (u, x' \text{ sunt variabile si } \min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} \leq \min\{t|x'(t-0) \neq x'(t)\})$$

etc. □

TEOREMĂ 176. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ *şi* $h : X \to P^*(S^{(p)}), X \in P^*(S^{(n)})$ *cu proprietatea că* $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$. *Dacă* f *şi* h *sunt neanticipative, atunci legarea lor în serie* $h \circ f : U \to P^*(S^{(p)})$ *e un sistem neanticipativ.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $u \in U$ ales în mod arbitrar, pentru care avem următoarele posibilităţi:

a) u e constant. Din Definiţia 63 aplicată lui f obţinem că $\forall x \in f(u), x$ e constant şi din Definiţia 63 aplicată lui h obţinem că $\forall y \in h(x), y$ e constant. Deci, din Definiţia 63 a), $h \circ f$ e neanticipativ;

b) u e variabil. Luăm un $x \in f(u)$ arbitrar şi din Definiţia 63 aplicată lui f avem existenţa a două posibilităţi:

b.a) x e constant. În acest moment putem aplica Definiţia 63 lui h, decurgând că $\forall y \in h(x), y$ e constant de unde, luând în considerare Definiţia 63 a), $h \circ f$ e neanticipativ;

b.b) x e variabil şi satisface $\min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} \leq \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\}$. Luăm un $y \in h(x)$ arbitrar, din Definiţia 63 aplicată lui h, rezultând existenţa a două posibilităţi:

b.b.a) y e constant. Din Definiţia 63 a) decurge că $h \circ f$ e neanticipativ;

b.b.b) y e variabil şi satisface $\min\{t|x(t-0) \neq x(t)\} \leq \min\{t|y(t-0) \neq y(t)\}$. În acest caz

$$\min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} \leq \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\} \leq \min\{t|y(t-0) \neq y(t)\},$$

de unde $h \circ f$ e din nou neanticipativ. □

TEOREMĂ 177. *Dacă* f *e neanticipativ şi* g *e un alt sistem, atunci* $f \cap g$ *e neanticipativ.*

DEMONSTRAŢIE. Ţinem cont de faptul că $f \cap g \subset f$ şi de Teorema 172. □

TEOREMĂ 178. *Fie sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$.

a) Dacă f, g *sunt neanticipative, atunci* $f \cup g$ *e neanticipativ de asemenea.*

b) Dacă $f \cup g$ *e neanticipativ, atunci* f, g *sunt ambele neanticipative.*

DEMONSTRAŢIE. a) Fie $u \in U \cup V$ şi $x \in (f \cup g)(u)$ arbitrare. Există trei posibilităţi: $u \in U \setminus V, u \in V \setminus U$ şi $u \in U \cap V$ etc.

b) Sunt adevărate incluziunile $f \subset f \cup g, g \subset f \cup g$ şi aplicăm Teorema 172. □

OBSERVATIE 49. *Sistemul autonom $f = X$ e neanticipativ dacă suntem în una dintre următoarele situaţii: a) $\forall x \in X, x$ e constant, b) $\exists x \in X$, x e variabil; atunci orice $u \in U$ e variabil şi (9.1) are loc.*

Pentru sistemul determinist $f : U \to S^{(n)}, U \in P^*(S^{(m)})$, condiţia de neanticipativitate e: $\forall u \in U$, a) $f(u)$ e constant sau b) $u, x = f(u)$ sunt ambele variabile şi satisfac (9.1). După cum am menţionat deja, acesta e cazul sistemelor combinaţionale ideale.

10. Alegerea lui 0 ca moment iniţial al timpului

NOTATIE 22. *Folosim notaţia*

$$S_0^{(m)} = \{u|u \in S^{(m)}, \forall t < 0, u(t) = u(0-0)\}.$$

TEOREMĂ 179. *Formulăm următoarele proprietăţi relative la un sistem $\widehat{f} : \widehat{U} \to P^*(S^{(n)})$, $\widehat{U} \in P^*(S^{(m)})$:*

i) $\widehat{U} \subset S_0^{(m)}$;

ii) $\forall u \in \widehat{U}, \widehat{f}(u) \subset S_0^{(n)}$;

iii) $\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in \widehat{U}, \forall x$,

$$(x \in \widehat{f}(u) \text{ si } u \circ \tau^d \in \widehat{U}) \Longrightarrow x \circ \tau^d \in \widehat{f}(u \circ \tau^d).$$

a) Se dă sistemul neanticipativ invariant în timp $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$. Definim sistemul $\widehat{f} : \widehat{U} \to P^*(S^{(n)})$ prin

$$\widehat{U} = \{u|u \in U \cap S_0^{(m)} \text{ si } f(u) \cap S_0^{(n)} \neq \emptyset\},$$

$$\forall u \in \widehat{U}, \widehat{f}(u) = f(u) \cap S_0^{(n)}. \tag{10.1}$$

Sistemul $\widehat{f}$ îndeplineşte i), ii), iii) şi e de asemenea neanticipativ.

b) Fie sistemul $\widehat{f} : \widehat{U} \to P^*(S^{(n)})$ satisfăcând proprietăţile i), ii), iii) şi neanticipativitatea. Sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ definit de

$$U = \{u \circ \tau^d | d \in \mathbf{R}, u \in \widehat{U}\},$$

$$\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in \widehat{U}, f(u \circ \tau^d) = \{x \circ \tau^d | x \in \widehat{f}(u)\}$$

e invariant în timp şi neanticipativ.

DEMONSTRAŢIE. a) Arătăm că $U \cap S_0^{(m)} \neq \emptyset$. Fie $u \in U$ şi avem posibilităţile următoare:

1) u e constant. Atunci $u \in S_0^{(m)}$, deci $u \in U \cap S_0^{(m)}$;

2) u e variabil.

Notăm $d = \min\{t|u(t-0) \neq u(t)\}$. Dacă $d \geq 0$, atunci au loc $u \in S_0^{(m)}$ şi $u \in U \cap S_0^{(m)}$. Dacă $d < 0$, atunci pentru orice $d' \geq -d$, e adevărat că $u \circ \tau^{d'} \in U$ deoarece U e invariantă la translaţii şi $u \circ \tau^{d'} \in S_0^{(m)}$ e de asemenea adevărată, de unde avem $u \circ \tau^{d'} \in U \cap S_0^{(m)}$.

Arătăm că $\widehat{U} \neq \emptyset$. Luăm un $u \in U \cap S_0^{(m)}$ arbitrar. Dacă $f(u) \cap S_0^{(n)} \neq \emptyset$ proprietatea e adevărată, în caz contrar fie un $x \in f(u)$. Faptul că $x \notin S_0^{(n)}$ arată că e variabil şi dacă notăm cu $d = \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\}$, avem $d < 0$. Observăm că $u \circ \tau^{d'} \in U$, $u \circ \tau^{d'} \in S_0^{(m)}$, $x \circ \tau^{d'} \in f(u \circ \tau^{d'})$ şi $x \circ \tau^{d'} \in S_0^{(n)}$ au loc pentru toţi $d' \geq -d$. Cu alte cuvinte $u \circ \tau^{d'} \in \widehat{U}$.

Aceasta arată că $\widehat{f}$ e bine definită, în sensul că $\widehat{U} \neq \emptyset$ şi $\forall u \in \widehat{U}, \widehat{f}(u) \neq \emptyset$. Mai mult, i) şi ii) sunt satisfăcute în mod evident.

Arătăm acum adevărul lui iii). Luăm $d \in \mathbf{R}$, $u \in \widehat{U}$, x arbitrare astfel încât $x \in \widehat{f}(u)$ şi $u \circ \tau^d \in \widehat{U}$. Avem următoarele posibilităţi:

j) x e constant. Atunci $x \circ \tau^d = x$ e constant şi $x \circ \tau^d \in S_0^{(n)}$;

jj) x e variabil. Deoarece $x \in f(u)$, din neanticipativitatea lui f avem că u e variabil şi

$$0 \leq \min\{t|(u \circ \tau^d)(t-0) \neq (u \circ \tau^d)(t)\} \leq \min\{t|(x \circ \tau^d)(t-0) \neq (x \circ \tau^d)(t)\},$$

ceea ce arată că $x \circ \tau^d \in S_0^{(n)}$.

În ambele cazuri j), jj), $x \in \widehat{f}(u)$ a implicat $x \in f(u)$ şi, mai departe, $x \circ \tau^d \in f(u \circ \tau^d)$ din invarianţa în timp a lui f şi, în cele din urmă, $x \circ \tau^d \in \widehat{f}(u \circ \tau^d)$ $(= f(u \circ \tau^d) \cap S_0^{(n)})$.

Deoarece $\widehat{f} \subset f$, neanticipativitatea lui $\widehat{f}$ e o consecinţă a Teoremei 172.

b) Arătăm că f e bine definită în sensul că dacă $d, d' \in \mathbf{R}$ şi există $u, v \in \widehat{U}$ aşa încât $u \circ \tau^d = v \circ \tau^{d'}$, obţinem $f(u \circ \tau^d) = f(v \circ \tau^{d'})$. Fie $x \circ \tau^d \in f(u \circ \tau^d)$. Deducem că $x \in \widehat{f}(u)$ şi $v = u \circ \tau^{d-d'} \in \widehat{U}$. Din iii) avem că $x \circ \tau^{d-d'} \in \widehat{f}(v)$, i.e. $x \circ \tau^d = x \circ \tau^{d-d'} \circ \tau^{d'} \in f(v \circ \tau^{d'})$. Am obţinut că $f(u \circ \tau^d) \subset f(v \circ \tau^{d'})$ şi incluziunea inversă se arată în mod similar.

Arătăm că U e invariantă la translaţii. Fie $v \in U$. Există atunci $d \in \mathbf{R}$ şi $u \in \widehat{U}$ aşa încât $v = u \circ \tau^d$. Pentru un $d' \in \mathbf{R}$ arbitrar, deoarece $v \circ \tau^{d'} = u \circ \tau^{d+d'}$, deducem $v \circ \tau^{d'} \in U$.

Arătăm că f e invariant în timp. Fie $v \in U$ şi $y \in f(v)$, ceea ce înseamnă că există $u \in \widehat{U}$ şi $d \in \mathbf{R}$ cu $v = u \circ \tau^d$. Obţinem $y \in f(u \circ \tau^d) = \{x \circ \tau^d | x \in \widehat{f}(u)\}$. Cu alte cuvinte $\exists x, y = x \circ \tau^d$ şi $x \in \widehat{f}(u)$. Luăm un $d' \in \mathbf{R}$ arbitrar pentru care $y \circ \tau^{d'} = x \circ \tau^{d+d'}$, $y \circ \tau^{d'} \in \{x \circ \tau^{d+d'} | x \in \widehat{f}(u)\} = f(u \circ \tau^{d+d'}) = f(v \circ \tau^{d'})$.

Arătăm acum că f e neanticipativ. Să luăm, ca mai înainte, $v \in U$ şi $y \in f(v)$, pentru care există $u \in \widehat{U}, x \in \widehat{f}(u)$ şi $d \in \mathbf{R}$ aşa încât $v = u \circ \tau^d$ şi $y = x \circ \tau^d$. Avem următoarele posibilităţi:

I) y e constant. Atunci f e neanticipativ;

II) y e variabil. Atunci $x \in \widehat{f}(u)$ e variabil şi ipoteza privitoare la neanticipativitatea lui $\widehat{f}$ afirmă că u e variabil şi

$$\min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} \leq \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\}.$$

Adăugăm d ambilor termeni ai inegalităţii şi obţinem

$$\min\{t|v(t-0) \neq v(t)\} = \min\{t|(u \circ \tau^d)(t-0) \neq (u \circ \tau^d)(t)\} \leq$$
$$\leq \min\{t|(x \circ \tau^d)(t-0) \neq (x \circ \tau^d)(t)\} = \min\{t|y(t-0) \neq y(t)\}.$$

□

Observatie 50. *Importanţa teoremei precedente e aceea că ea dă circumstanţele în care putem alege 0 ca moment iniţial al timpului, simplificând un pic studiul sistemelor asincrone. Folosim deseori în aplicaţii această posibilitate.*

Observăm că această teoremă reprezintă trecerea de la $S^{(m)}$ la $S_0^{(m)}$ similară trecerii din Capitolul 3 de la $Diff^{(m)}$ la $\widetilde{S}^{(m)}$ şi trecerii din Capitolul 4 de la $\widetilde{S}^{(m)}$ la $S^{(m)}$. Pe de altă parte, proprietăţile i), ii) arată similar lui b), c) din Definiţia

37 şi iii) arată similar Definiţiei 62 a invarianţei în timp, adaptate situaţiei când $\widehat{U}$ nu e invariantă la translaţii (vezi Lema 2, a)).

11. Neanticipativitate, a doua definiţie

DEFINITIE 64. *Sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ se numeşte* ***neanticipativ*** *dacă $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,*

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]}|x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]}|y \in f(v)\}$$

e adevărată şi ***anticipativ*** *în caz contrar.*

OBSERVATIE 51. *Definiţia 64 afirmă că pentru orice t şi orice u, restricţiile $x_{|(-\infty,t]}$ unde $x \in f(u)$ depind doar de restricţia $u_{|(-\infty,t)}$ şi sunt independente de valorile $u(t'), t' \geq t$. Cu alte cuvinte, prezentul depinde de trecut şi e independent de viitor sau, mai corect, istoricul tuturor stărilor posibile, incluzând şi prezentul lor, depinde doar de istoricul intrării şi nu depinde de valorile prezente şi viitoare ale intrării. Definiţia arată că $\forall t \in \mathbf{R}$ există o funcţie f_t care asociază $\forall u \in U$ lui $u_{|(-\infty,t)}$ mulţimea*

$$f_t(u_{|(-\infty,t)}) = \{x_{|(-\infty,t]}|x \in f(u)\}.$$

Definiţia 64 reprezintă o nouă perspectivă asupra neanticipativităţii, diferită de precedenta din Secţiunea 9 şi cele două proprietăţi sunt logic independente. Atunci când vom face comparaţii între cele două noţiuni de neanticipativitate vom spune explicit la care dintre ele ne referim. Când vom folosi doar cuvântul 'neanticipativitate', acesta se va referi implicit la noţiunea definită în acestă secţiune.

EXEMPLU 58. *Sistemul determinist $f : S^{(m)} \to S$,*

$$\forall u \in S^{(m)}, f(u) = \chi_{[0,1)} \oplus (u_1 \circ \tau^1) \cdot \chi_{[1,\infty)}$$

e neanticipativ în sensul Definiţiei 64. Sistemul f e anticipativ în sensul Definiţiei 63 deoarece pentru $u_1 = \chi_{[2,\infty)}$, $u_2 = ... = u_m = 0$ se obţine $\min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} = 2 > 0 = \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\}$.

EXEMPLU 59. *Sistemul determinist $f : S \to S$,*

$$\forall u \in S, f(u) = \begin{cases} 1, dacă\ u = \chi_{[0,\infty)} \\ u,\ altfel \end{cases},$$

e anticipativ în sensul Definiţiei 64 deoarece pentru $t_1 = 1$, $u = \chi_{[0,\infty)}$, $v = \chi_{[0,2)}$ avem $u_{|(-\infty,t_1)} = v_{|(-\infty,t_1)}$ dar $1_{|(-\infty,1]} \neq \chi_{[0,2)_{|(-\infty,1]}}$. Totuşi sistemul e neanticipativ în sensul Definiţiei 63.

EXEMPLU 60. *Sistemul determinist $f : S \to S$*

$$\forall u \in S, f(u) = \begin{cases} 1, dacă\ u = \chi_{[0,\infty)} \\ u \circ \tau^{-1},\ altfel \end{cases}$$

e anticipativ în sensul ambelor Definiţii 63 şi 64.

EXEMPLU 61. *Sistemul determinist*

$$Dx(t) = (x(t-0) \oplus u(t-0)) \cdot \overline{\bigcup_{\xi \in (t-d,t)} Du(\xi)}$$

$u, x \in S, d > 0$ e neanticipativ în sensul ambelor Definiţii 63 şi 64. Ideea exprimată de acestă ecuaţie e: x comută la acele momente de timp când u a indicat necesitatea unei astfel de comutări ($x(t-0) \oplus u(t-0) = 1$) timp de d unităţi temporale

($u_{|[t-d,t)}$ e funcţia constantă, cu derivată nulă în intervalul $(t-d,t)$). Această ecuaţie modelează circuitul de întârziere.

TEOREMĂ 180. *Dacă f e neanticipativ, atunci funcţia sa stare iniţială ϕ_0 satisface*

$$\forall u \in U, \forall v \in U, u(-\infty+0) = v(-\infty+0) \Longrightarrow \phi_0(u) = \phi_0(v).$$

DEMONSTRAŢIE. Fie u, v arbitrare aşa încât $u(-\infty+0) = v(-\infty+0)$. Aşadar există un t cu $u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)}$. Din neanticipativitatea lui f obţinem $\{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\}$ şi aceasta implică

$$\phi_0(u) = \{x(-\infty+0) | x \in f(u)\} = \{y(-\infty+0) | y \in f(v)\} = \phi_0(v).$$

$\square$

OBSERVATIE 52. *Teorema precedentă arată existenţa unei funcţii parţiale $\mathbf{B}^m \to P^*(\mathbf{B}^n)$ care asociază lui $u(-\infty+0)$ mulţimea $\{x(-\infty+0) | x \in f(u)\}$.*

TEOREMĂ 181. *Dacă f e neanticipativ, atunci f^* e neanticipativ de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U^*, \forall v \in U^*$,

$$\begin{aligned} u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} &\Longrightarrow \overline{u}_{|(-\infty,t)} = \overline{v}_{|(-\infty,t)} \\ &\Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(\overline{u})\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(\overline{v})\} \\ &\Longrightarrow \{\overline{x}_{|(-\infty,t]} | x \in f(\overline{u})\} = \{\overline{y}_{|(-\infty,t]} | y \in f(\overline{v})\} \\ &\Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f^*(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f^*(v)\}. \end{aligned}$$

$\square$

TEOREMĂ 182. *Fie sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$. Dacă f, f' sunt neanticipative, atunci $f \times f'$ e neanticipativ.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru $t \in \mathbf{R}, u \in U, v \in U, u' \in U', v' \in U'$ arbitrare, ipoteza afirmă

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \text{ } si \text{ } u'_{|(-\infty,t)} = v'_{|(-\infty,t)}.$$

Din neanticipativitatea lui f se obţine

$$\{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\},$$

iar din neanticipativitatea lui f' rezultă

$$\{x'_{|(-\infty,t]} | x' \in f'(u')\} = \{y'_{|(-\infty,t]} | y' \in f'(v')\}.$$

Prin conjuncţia ultimelor două afirmaţii avem

$$\{(x \times x')_{|(-\infty,t]} | x \times x' \in (f \times f')(u \times u')\} = \{(y \times y')_{|(-\infty,t]} | y \times y' \in (f \times f')(v \times v')\}$$

ceea ce arată faptul că $f \times f'$ e neanticipativ. $\square$

TEOREMĂ 183. *Considerăm sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $f'_1 : U'_1 \to P^*(S^{(n')})$, $U'_1 \in P^*(S^{(m)})$ cu proprietatea că $U \cap U'_1 \neq \emptyset$. Dacă f, f'_1 sunt neanticipative, atunci legarea în paralel (f, f'_1) e neanticipativă şi ea.*

TEOREMĂ 184. *Se dau sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$ având proprietatea că $\bigcup_{u \in U} f(u) \subset X$. Dacă f, h sunt neanticipative, atunci legarea în serie $h \circ f$ e neanticipativă de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $t \in \mathbf{R}, u \in U, v \in U$ arbitrare. Avem

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]}|x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]}|y \in f(v)\}$$

$$\Longrightarrow \{z_{|(-\infty,t]}|x \in f(u), z \in h(x)\} = \{z'_{|(-\infty,t]}|y \in f(v), z' \in h(y)\}$$

$$\Longrightarrow \{z_{|(-\infty,t]}|z \in (h \circ f)(u)\} = \{z'_{|(-\infty,t]}|z' \in (h \circ f)(v)\},$$

ceea ce implică neanticipativitatea lui $h \circ f$. □

TEOREMĂ 185. *Fie sistemele neanticipative* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(m)})$, $U, V \in P^*(S^{(n)})$. *Dacă* $U \cap V \neq \emptyset$ *şi* $\exists u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, *atunci* $f \cap g$ *e neanticipativ.*

DEMONSTRAŢIE. Să punem $W = \{u|u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}$ şi să luăm nişte $t \in \mathbf{R}, u \in W, v \in W$ arbitrare aşa încât ipoteza

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)}$$

să fie adevărată, ceea ce arată că

$$\{x_{|(-\infty,t]}|x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]}|y \in f(v)\},$$

$$\{x_{|(-\infty,t]}|x \in g(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]}|y \in g(v)\}$$

sunt ambele adevărate. Intersectăm termenii stângi şi pe cei drepţi ai celor două ecuaţii şi obţinem

$$\{x_{|(-\infty,t]}|x \in (f \cap g)(u)\} = \{x_{|(-\infty,t]}|x \in f(u) \cap g(u)\} =$$

$$= \{x_{|(-\infty,t]}|x \in f(u)\} \cap \{x_{|(-\infty,t]}|x \in g(u)\} =$$

$$= \{y_{|(-\infty,t]}|y \in f(v)\} \cap \{y_{|(-\infty,t]}|y \in g(v)\} =$$

$$= \{y_{|(-\infty,t]}|y \in f(v) \cap g(v)\} = \{y_{|(-\infty,t]}|y \in (f \cap g)(v)\}.$$

□

EXEMPLU 62. *Fie* $U = \{0, \chi_{[0,\infty)}\}$ *şi* $f : U \to S$ *sistemul determinist dat de* $f(0) = \chi_{[1,\infty)}$, $f(\chi_{[0,\infty)}) = \chi_{(-\infty,0)}$. *El e anticipativ deoarece* $0_{|(-\infty,0)} = \chi_{[0,\infty)|(-\infty,0)}$ *şi* $\chi_{[1,\infty)|(-\infty,0]} \neq \chi_{(-\infty,0)|(-\infty,0]}$. *În acelaşi timp,* f *e reuniunea (disjunctă) a sistemelor* $f_1 : \{0\} \to S$, $f_2 : \{\chi_{[0,\infty)}\} \to S$ *definite de* $f_1(0) = \chi_{[1,\infty)}$, $f_2(\chi_{[0,\infty)}) = \chi_{(-\infty,0)}$. *Sistemele* f_1 *şi* f_2 *sunt ambele neanticipative. Concluzionăm că, în general, reuniunea sistemelor neanticipative nu e un sistem neanticipativ.*

TEOREMĂ 186. *Orice sistem autonom* $X \in P^*(S^{(n)})$ *e neanticipativ.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $t \in \mathbf{R}, u \in U, v \in U$ avem

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]}|x \in X\} = \{x_{|(-\infty,t]}|x \in X\}.$$

□

12. Alte definiţii ale neanticipativităţii. Neanticipativitatea*

DEFINITIE 65. *Sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ e numit **neanticipativ** dacă satisface una din următoarele condiţii:*

i) $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U,$

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\};$$

ii) $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U, \exists d > 0,$

$$u_{|[t-d,t)} = v_{|[t-d,t)} \Longrightarrow \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\};$$

iii) $\forall t \in \mathbf{R}, \exists d > 0, \forall u \in U, \forall v \in U,$

$$u_{|[t-d,t)} = v_{|[t-d,t)} \Longrightarrow \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\};$$

iv) $\exists d > 0, \forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U,$

$$u_{|[t-d,t)} = v_{|[t-d,t)} \Longrightarrow \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\};$$

v) $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U,$

$$u_{|(-\infty,t]} = v_{|(-\infty,t]} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]}|x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]}|y \in f(v)\};$$

vi) $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U,$

$$u_{|(-\infty,t]} = v_{|(-\infty,t]} \Longrightarrow \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\};$$

vii) $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U, \exists d, \exists d', 0 \leq d \leq d'$ *şi*

$$u_{|[t-d',t-d]} = v_{|[t-d',t-d]} \Longrightarrow \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\};$$

viii) $\forall t \in \mathbf{R}, \exists d, \exists d', 0 \leq d \leq d'$ *şi* $\forall u \in U, \forall v \in U,$

$$u_{|[t-d',t-d]} = v_{|[t-d',t-d]} \Longrightarrow \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\};$$

ix) $\exists d, \exists d', 0 \leq d \leq d'$ *şi* $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U,$

$$u_{|[t-d',t-d]} = v_{|[t-d',t-d]} \Longrightarrow \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\}.$$

TEOREMĂ 187. *Fie $f : U \to S^{(n)}$ e un sistem determinist. Atunci Definiţia 65 v) şi Definiţia 65 vi) sunt echivalente, iar Definiţia 64 şi Definiţia 65 i) sunt echivalente în acest caz şi ele.*

DEMONSTRAŢIE. Demonstrăm prima afirmaţie. Deoarece v)$\Longrightarrow$vi) e evidentă, arătăm vi)$\Longrightarrow$v). Să presupunem prin absurd că v) nu e adevărată, i.e. $\exists t \in \mathbf{R}, \exists u \in U, \exists v \in U, u_{|(-\infty,t]} = v_{|(-\infty,t]}$ şi $f(u)_{|(-\infty,t]} \neq f(v)_{|(-\infty,t]}$. Aceasta înseamnă existenţa lui $t_0 \leq t$ aşa încât $u_{|(-\infty,t_0]} = v_{|(-\infty,t_0]}$ şi $f(u)(t_0) \neq f(v)(t_0)$, contradicţie cu vi). □

OBSERVATIE 53. *În Definiţia 65, toate punctele i),...,ix) exprimă aceeaşi idee ca şi Definiţia 64, anume că prezentul depinde de trecut doar şi e independent de viitor. Implicaţiile sunt:*

$$\begin{array}{ccccccccc} iv) & \Longrightarrow & iii) & \Longrightarrow & ii) & \Longrightarrow & i) & \Longleftarrow & Definitia\ 64 \\ & & & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\ ix) & \Longrightarrow & viii) & \Longrightarrow & vii) & \Longrightarrow & vi) & \Longleftarrow & v) \end{array}$$

În ii),...,iv), vii),...,ix) apare ideea de mărginire a memoriei: există sisteme ale căror stări nu depind de întregul segment de intrare $u_{|(-\infty,t)}$, ci doar de ultimele d unităţi de timp ale sale $u_{|[t-d,t)}$ şi similar pentru $u_{|(-\infty,t]}$ şi $u_{|[t-d',t-d]}$.

Să aruncăm acum o privire asupra proprietăţii de neanticipativitate iv). Remarcăm că dacă $d > 0$ e un număr pentru care ea e satisfăcută, atunci orice număr $d' \geq d$ o satisface de asemenea: $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U,$

$$u_{|[t-d',t)} = v_{|[t-d',t)} \Longrightarrow \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\}.$$

Problema pe care ne-o punem e dacă mulţimea acelor d care satisfac implicaţia iv) e mărginită inferior de un $d'' > 0$, deoarece avem şi o proprietate de neanticipativitate $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U,$

$$u(t-0) = v(t-0) \Longrightarrow \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\}$$

ca în următorul exemplu

$$u(t-0) \cdot x(t) = 0$$

în care $u, x \in S$. Dacă această margine inferioară există, obţinem o nouă nuanţă a conceptului de neanticipativitate. Problema de existenţă a unei astfel de margini e, în principiu aceeaşi dacă d e variabil ca în ii), iii) sau dacă în locul unui parametru d avem doi parametri d, d' şi două margini, ca în vii), viii), ix).

Să mai remarcăm că raţionamentul din Teorema 187 e imposibil dacă f e nedeterminist. Presupunem pentru a arăta acest lucru că sistemul $f : S \to P^*(S)$ satisface $f(0) = \{0, 1\}$, $f(\chi_{[2,\infty)}) = \{\chi_{(-\infty,0)}, \chi_{[0,\infty)}\}$, unde $0, 1 \in S$ sunt funcţiile constante. Avem $\forall t \in [0, 2)$,

$$0_{|(-\infty,t]} = \chi_{[2,\infty)|(-\infty,t]} \text{ si}$$

$$\text{si } \{0_{|(-\infty,t]}, 1_{|(-\infty,t]}\} \neq \{\chi_{(-\infty,0)|(-\infty,t]}, \chi_{[0,\infty)|(-\infty,t]}\} \text{ si}$$

$$\text{si } \{x(t)|x \in f(0)\} = \{0, 1\} = \{y(t)|y \in f(\chi_{[2,\infty)})\}.$$

EXEMPLU 63. *Sistemul $I_d : S \to S$ definit de $\forall u \in S, x(t) = I_d(u)(t) = u(t-d)$, satisface pentru $d > 0$ proprietăţile de neanticipativitate i),...,ix) din Definiţia 65 la fel ca şi proprietatea de mărginire inferioară de la sfârşitul Observaţiei 53.*

EXEMPLU 64. *Fie sistemele $S \to P^*(S)$ definite de inegalităţile*

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r,t)} u(\xi) \leq x(t),$$

$$x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f,t)} u(\xi),$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r,t)} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f,t)} u(\xi),$$

în care $d_r > 0, d_f > 0$. Ultima dintre ele reprezintă intersecţia primelor două. Cele trei sisteme satisfac toate proprietăţile de neanticipativitate i),...,ix) din Definiţia 65, împreună cu proprietatea de mărginire din Observaţia 53 (se vede că marginile inferioare sunt d_r, d_f şi $\max\{d_r, d_f\}$).

EXEMPLU 65. *Sistemele $S \to P^*(S)$ descrise prin inecuaţiile*

$$\bigcap_{\xi \in [t-d',t-d]} u(\xi) \leq x(t),$$

$$x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d',t-d]} u(\xi),$$

în care $0 \le d \le d'$, la fel ca şi intersecţia lor

$$\bigcap_{\xi\in[t-d',t-d]} u(\xi) \le x(t) \le \bigcup_{\xi\in[t-d',t-d]} u(\xi),$$

satisfac proprietăţile de neanticipativitate v),...,ix) din Definiţia 65.

EXEMPLU 66. *Sistemul $S \to P^*(S)$ definit de*

$$\int_{-\infty}^{t} u \le x(t)$$

(vezi Exemplul 30 pentru definiţia integralei) satisface proprietăţile de neanticipativitate v), vi) din Definiţia 65.

EXEMPLU 67. *Notăm cu $\varphi : S^{(m)} \to \mathbf{R}$ funcţia*

$$\forall u \in S^{(m)}, \varphi(u) = \begin{cases} 0, \text{dacă } u \text{ e constant} \\ \min\{t|u(t-0) \ne u(t)\}, \text{dacă } u \text{ e variabil} \end{cases}.$$

Sistemul determinist

$$x(t) = \bigcap_{\xi\in[t-\varphi^4(u),t-\varphi^2(u)]} u(\xi),$$

$u, x \in S$, satisface proprietatea de neanticipativitate vii) din Definiţia 65.

DEFINITIE 66. *Sistemul f se numeşte* ***neanticipativ**** *dacă satisface $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U$,*

$$(u_{|[t,\infty)} = v_{|[t,\infty)} \text{ si } \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\}) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \{x_{|[t,\infty)}|x \in f(u)\} = \{y_{|[t,\infty)}|y \in f(v)\}$$

şi ***anticipativ**** *în caz contrar.*

OBSERVATIE 54. *Spre deosebire de neanticipativitate care leagă trecutul şi prezentul intrărilor şi stărilor, neanticipativitatea* leagă prezentul şi viitorul lor. Remarcăm că această proprietate seamănă intr-un fel cu fixarea condiţiilor iniţiale într-o ecuaţie diferenţială ($\{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\}$) cu consecinţa că soluţia e unică ($\{x_{|[t,\infty)}|x \in f(u)\} = \{y_{|[t,\infty)}|y \in f(v)\}$) sub o intrare dată ($u_{|[t,\infty)} = v_{|[t,\infty)}$).*

Dăm încă alte două proprietăţi de neanticipativitate: $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U$,*

$$u_{|[t,\infty)} = v_{|[t,\infty)} \Longrightarrow \exists t' \in \mathbf{R}, \{x_{|[t',\infty)}|x \in f(u)\} = \{y_{|[t',\infty)}|y \in f(v)\}$$

şi $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U$,

$$(u_{|[t,\infty)} = v_{|[t,\infty)} \text{ si } \{x_{|(-\infty,t]}|x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]}|y \in f(v)\}) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \exists t' \in \mathbf{R}, \{x_{|[t',\infty)}|x \in f(u)\} = \{y_{|[t',\infty)}|y \in f(v)\}.$$

Cititorul e invitat să scrie alte proprietăţi similare.

13. Injectivitate, prima definiţie

DEFINITIE 67. *Sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ e numit* ***injectiv*** *dacă*

$$\forall u \in U, \forall v \in U, u \ne v \Longrightarrow f(u) \ne f(v).$$

OBSERVATIE 55. *Aceasta e o primă perspectivă asupra injectivităţii, anume cea care afirmă că dacă intrările u, v sunt distincte, atunci mulţimile stărilor posibile $f(u)$, $f(v)$ sunt distincte. Dacă f e determinist, atunci injectivitatea sa coincide cu injectivitatea uzuală a funcţiilor (univoce).*

EXEMPLU 68. *Să considerăm cele trei sisteme din Exemplul 64. Primul, notat prin* $f_1 : S \to P^*(S)$, *e cel descris prin inegalitatea*

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} u(\xi) \leq x(t),$$

$d_r > 0$, $u, x \in S$ *şi satisface proprietatea că pentru orice* $u = \chi_{[t_0,t_1)}$ *cu* $0 < t_1 - t_0 < d_r$, $\bigcap\limits_{\xi\in[t-d_r,t)} u(\xi) = 0$ *şi* $f_1(u) = S$. *Aşadar sistemul nu e injectiv. În mod similar, cel de-al doilea sistem* $f_2 : S \to P^*(S)$ *dat prin*

$$x(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} u(\xi)$$

$d_f > 0$, *satisface proprietatea că pentru orice* $u = \chi_{(-\infty,t_0)\cup[t_1,\infty)}$ *aşa încât* $0 < t_1 - t_0 < d_f$, $\bigcup\limits_{\xi\in[t-d_f,t)} u(\xi) = 1$ *şi avem* $f_2(u) = S$. *Deci sistemul nu e injectiv nici el. Cel de-al treilea sistem* $f_3 = f_1 \cap f_2$ *nu e injectiv, deoarece pentru orice* $u = \chi_{[t_0,t_1)\cup[t_2,t_3)\cup\ldots}$, *cu* $\forall k \in \mathbf{N}, t_{2k+1} - t_{2k} < d_r$ *şi* $t_{2k+2} - t_{2k+1} < d_f$, *avem* $\bigcap\limits_{\xi\in[t-d_r,t)} u(\xi) = 0$, $\bigcup\limits_{\xi\in[t-d_f,t)} u(\xi) = \chi_{(t_0,\infty)}(t)$ *şi* $f_3(u) = \{x|x \in S, supp\ x \subset (t_0,\infty)\}$.

EXEMPLU 69. *Sistemele autonome* $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ *cu* $|U| = 1$ *sunt injective.*

EXEMPLU 70. *Sistemele autonome* $f = X$ *cu* $|U| \neq 1$ *nu sunt injective.*

EXEMPLU 71. *Sistemele descrise prin inegalităţile*

$$u(t) \leq x(t),$$

$$x(t) \leq u(t),$$

$u, x \in S$ *sunt injective, la fel ca şi intersecţia lor care e sistemul determinist* $x(t) = u(t)$.

EXEMPLU 72. *Pentru* $d \in \mathbf{R}$ *fixat, sistemul determinist* $f : S \to S, f(u) = u \circ \tau^d$ *e injectiv.*

EXEMPLU 73. *Sistemul* $f : U \to P^*(S), U = \{u|u \in S^{(2)}, u_1(t) \leq u_2(t)\}$ *descris prin inegalitatea*

$$u_1(t) \leq x(t) \leq u_2(t)$$

e injectiv. Într-adevăr, la fiecare moment de timp t *există trei posibilităţi:* $u_1(t) = u_2(t) = x(t) = 0$; $u_1(t) = 0, u_2(t) = 1, x(t) \in \mathbf{B}$; $u_1(t) = u_2(t) = x(t) = 1$ *şi intrărilor distincte le corespund mulţimi distincte de soluţii.*

TEOREMĂ 188. *Dualul unui sistem injectiv e injectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă f e injectiv, atunci pentru orice $u, v \in U^*$ avem

$$u \neq v \Longrightarrow \overline{u} \neq \overline{v} \Longrightarrow f(\overline{u}) \neq f(\overline{v}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \{\overline{x}|x \in f(\overline{u})\} \neq \{\overline{x}|x \in f(\overline{v})\} \Longrightarrow f^*(u) \neq f^*(v).$$

□

TEOREMĂ 189. *Fie sistemele injective* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$, $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$. *Atunci sistemul* $f \times f'$ *e injectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Să luăm $u \times u', v \times v' \in U \times U'$ în mod arbitrar, aşa încât $u \times u' \neq v \times v'$, de exemplu $u \neq v$. Din injectivitatea lui f deducem

$$(f \times f')(u \times u') = f(u) \times f'(u') \neq f(v) \times f'(v') = (f \times f')(v \times v').$$

□

TEOREMĂ 190. *Legarea în paralel a sistemelor injective e un sistem injectiv.*

TEOREMĂ 191. *Dacă $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ e o funcţie injectivă şi $d \in \mathbf{R}$, atunci sistemul F_d e injectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $u, v \in S^{(m)}$ aşa încât $\exists t_0, u(t_0) \neq v(t_0)$. Atunci $F(u(t_0)) \neq F(v(t_0))$ de unde $F_d(u)(t_0 + d) \neq F_d(v)(t_0 + d)$. □

OBSERVATIE 56. *Presupunem că f e simetric. Dacă $m > 1$, atunci el nu e injectiv deoaarece există $\sigma \in S(\{1, ..., m\})$ şi $u \in U$ aşa încât $u \neq u_\sigma$ şi $f(u) = f(u_\sigma)$.*

Spiritul Definiţiilor 64, 65 de neanticipativitate, al Definiţiei 66 de neanticipativitate şi al Definiţiei 67 de injectivitate dă noi definiţii ale injectivităţii precum: $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U$,*

$$u_{|(-\infty,t)} \neq v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} \neq \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\},$$

$\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U$,

$$u_{|[t,\infty)} \neq v_{|[t,\infty)} \Longrightarrow \exists t' \in \mathbf{R}, \{x_{|[t',\infty)} | x \in f(u)\} \neq \{y_{|[t',\infty)} | y \in f(v)\}$$

etc.

14. Injectivitate, a doua definiţie

DEFINITIE 68. *Sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ e* ***injectiv*** *dacă satisface proprietatea*

$$\forall u \in U, \forall v \in U, u \neq v \Longrightarrow f(u) \cap f(v) = \emptyset.$$

OBSERVATIE 57. *Această a doua definiţie a injectivităţii afirmă mai mult decât precedenta, anume că dacă două intrări ale lui f sunt distincte, atunci mulţimile stărilor posibile corespunzătoare sunt nu doar distincte, dar şi disjuncte. În cazul sistemelor deterministe, ea coincide cu prima definiţie a injectivităţii şi de asemenea cu injectivitatea uzuală. In particular Teorema 191 e adevărată şi pentru definiţia a doua a injectivităţii.*

Un sistem injectiv f produce o partiţie a mulţimii $X = \bigcup_{u \in U} f(u)$ în clase de echivalenţă ale relaţiei

$$\forall x \in X, \forall y \in X, x \sim y \Longleftrightarrow \exists u \in U, x \in f(u) \; si \; y \in f(u).$$

Mai mult, în definiţia precedentă $\exists u \in U$ e, de fapt, $\exists! u \in U$ şi există o bijecţie între U şi $X/\sim$.

EXEMPLU 74. *Sistemul $f : S^{(m)} \to P^*(S^{(m+1)})$ definit de*

$$\forall u \in S^{(m)}, f(u) = \{u \times x' | x' \in S\}$$

e injectiv.

EXEMPLU 75. *Sistemul* $f : S \to P^*(S^{(2)})$,

$$\forall u \in S, f(u) = \begin{cases} \{u \times (u \circ \tau^1), u \times (u \circ \tau^2)\}, & \textit{dacă } u \textit{ e variabil} \\ \{u \times u\}, & \textit{altfel} \end{cases}$$

e injectiv.

EXEMPLU 76. *Sistemul* $f : S \to P^*(S)$,

$$\forall u \in S, f(u) = \begin{cases} \{u \circ \tau^1, u \circ \tau^2\}, & \textit{dacă } u \textit{ e variabil} \\ \{u\}, & \textit{altfel} \end{cases}$$

e injectiv.

TEOREMĂ 192. *Dacă* $g : V \to P^*(S^{(n)}), V \in P^*(S^{(m)})$ *e injectiv şi* $f \subset g$, *atunci* f *e injectiv de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem că domeniul de definiţie al lui f e U. Dacă $|U| = 1$, atunci afirmaţia e adevărată. Aşadar putem presupune că $|U| \neq 1$. Fie $u, v \in U, u \neq v$. Deoarece $g(u) \cap g(v) = \emptyset$, $f(u) \subset g(u)$, $f(v) \subset g(v)$, deducem $f(u) \cap f(v) = \emptyset$. $\square$

TEOREMĂ 193. *Dacă* f *e injectiv, atunci* f^* *e injectiv de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru $u, v \in U^*$ cu $u \neq v$, deducem că $f(\overline{u}) \cap f(\overline{v}) = \emptyset$. Deci $\{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} \cap \{\overline{x} | x \in f(\overline{v})\} = \emptyset$ şi, în cele din urmă, $f^*(u) \cap f^*(v) = \emptyset$. $\square$

TEOREMĂ 194. *Dacă sistemul* f *e injectiv, atunci* f^{-1} *e determinist.*

DEMONSTRAŢIE. Să notăm $X = \bigcup\limits_{u \in U} f(u)$ şi să presupunem prin absurd că $\exists x \in X$ şi $\exists u \in f^{-1}(x)$, $\exists v \in f^{-1}(x)$ cu $u \neq v$. Acest lucru ne conduce la concluzia că $x \in f(u) \cap f(v)$. Deci $f(u) \cap f(v) \neq \emptyset$, contradicţie. $\square$

TEOREMĂ 195. *Produsul cartezian de sisteme injective e injectiv.*

TEOREMĂ 196. *Fie sistemele injective* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $f_1' : U_1' \to P^*(S^{(n')})$, $U, U_1' \in P^*(S^{(m)})$ *cu* $U \cap U_1' \neq \emptyset$. *Legarea în paralel* $(f, f_1') : U \cap U_1' \to P^*(S^{(n+n')})$ *e injectivă.*

DEMONSTRAŢIE. Să luăm $u, v \in U \cap U_1'$ distincte (dacă $|U \cap U_1'| = 1$, atunci proprietatea e evidentă). Faptul că $f(u) \cap f(v) = \emptyset$, $f_1'(u) \cap f_1'(v) = \emptyset$ implică $(f(u) \times f_1'(u)) \cap (f(v) \times f_1'(v)) = \emptyset$ i.e. $(f, f_1')(u) \cap (f, f_1')(v) = \emptyset$. $\square$

TEOREMĂ 197. *Considerăm sistemele injective* $f : U \to P^*(S^{(n)})$ *şi* $h : X \to P^*(S^{(p)})$, *unde* $U \in P^*(S^{(m)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$. *Cerem ca incluziunea* $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$ *să aibe loc. Atunci* $h \circ f$ *e injectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $|U| = 1$, atunci $h \circ f$ e injectiv. Deci putem presupune că $|U| \neq 1$. Luăm două intrări arbitrare distincte $u, v \in U$. În formula

$$(h \circ f)(u) \cap (h \circ f)(v) = \bigcup_{x \in f(u)} h(x) \cap \bigcup_{x' \in f(v)} h(x') =$$

$$= \{y | \exists x \in f(u), \exists x' \in f(v), y \in h(x) \cap h(x')\}$$

$u \neq v$ implică $f(u) \cap f(v) = \emptyset$, i.e. $x \neq x'$ şi în cele din urmă $h(x) \cap h(x') = \emptyset$. $\square$

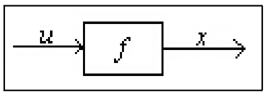

FIGURA 1

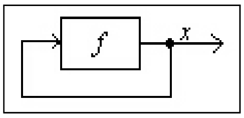

FIGURA 2

TEOREMĂ 198. *Presupunem că sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $U, V \in P^*(S^{(m)})$ *sunt ambele injective şi, mai departe, că mulţimea*

$$W = \{u|u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}$$

e nevidă. Atunci $f \cap g$ *e injectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Putem presupune că $|W| \neq 1$ şi luăm $u, v \in W$ distincte. Relaţia $f(u) \cap f(v) = \emptyset$ arată că $(f(u) \cap g(u)) \cap (f(v) \cap g(v)) = \emptyset$. Deci $(f \cap g)(u) \cap (f \cap g)(v) = \emptyset$. □

TEOREMĂ 199. *Dacă* f *e auto-dual şi injectiv, atunci* $\forall u \in U, \forall x \in f(u), \overline{x} \notin f(u)$.

DEMONSTRAŢIE. Avem $U = U^*$, deci $\forall u \in U$ obţinem $\overline{u} \in U$. În continuare $u \neq \overline{u}$, deci din injectivitate $f(u) \cap f(\overline{u}) = \emptyset$ şi, prin aplicarea ipotezei de auto-dualitate, se obţine $\emptyset = f(u) \cap f^*(\overline{u}) = f(u) \cap \{\overline{x}|x \in f(u)\}$. □

OBSERVATIE 58. *Neanticipativitatea lui f:* $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]}|x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]}|y \in f(v)\}$$

e legată de injectivitate în felul următor. Fie $u, v \in U$ *aşa încât* $\exists t_0$ *cu* $u_{|(-\infty,t_0)} = v_{|(-\infty,t_0)}$ *şi* $u(t_0) \neq v(t_0)$. *Atunci* $\forall x \in f(u), \forall y \in f(v)$ *avem* $x_{|(-\infty,t_0]} = y_{|(-\infty,t_0]}$ *şi* $\exists t' > t_0, x(t') \neq y(t')$.

Ca şi în Obsevaţia 56, putem da noi definiţii ale injectivităţii în spiritul Definiţiei 68: $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U$,

$$u_{|(-\infty,t)} \neq v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]}|x \in f(u)\} \cap \{y_{|(-\infty,t]}|y \in f(v)\} = \emptyset,$$

$\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U$,

$$u_{|[t,\infty)} \neq v_{|[t,\infty)} \Longrightarrow \exists t' \in \mathbf{R}, \{x_{|[t',\infty)}|x \in f(u)\} \cap \{y_{|[t',\infty)}|y \in f(v)\} = \emptyset$$

etc.

15. Sisteme Huffman, probleme deschise

OBSERVATIE 59. *În această secţiune, pentru a scoate în relief simbolul său* f, *intrarea sa* u *şi o stare posibilă* $x \in f(u)$, *un sistem va fi desenat ca în Figura 1.*

Dacă $f : S^{(n)} \to P^*(S^{(n)})$ *are intrarea egală cu ieşirea ca în Figura 2, atunci el defineşte sistemul autonom* $X \subset S^{(n)}$ *prin*

$$X = \{x|x \in f(x)\}.$$

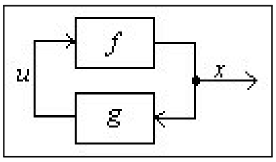

FIGURA 3

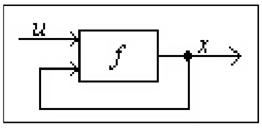

FIGURA 4

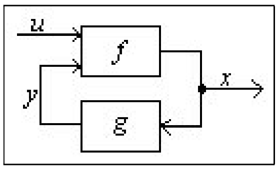

FIGURA 5

*Aşadar stările sistemului cu feedback sunt un fel de puncte fixe ale lui f. Iată prima **Problemă deschisă**: are f puncte fixe? În ce condiţii? În următorul exemplu simplu*

$$\forall x \in S^{(n)}, f(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

răspunsul la întrebarea precedentă e negativ.

Considerăm două sisteme $f, g : S^{(n)} \to P^*(S^{(n)})$ şi sistemul autonom $X \subset S^{(n)}$ din Figura 3. Avem

$$X = \{x | \exists u \in g(x), x \in f(u)\}.$$

Mai departe, sistemul $f : U \times S^{(n)} \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ dă sistemul cu feedback din Figura 4. pe care îl notăm cu $h : U \to P^*(S^{(n)})$. Sistemul h e definit în felul următor

$$\forall u \in U, h(u) = \{x | x \in f(u, x)\}.$$

Ideea e aceea de a pune în bucla de feedback din Figura 4 un sistem $g : S^{(n)} \to P^*(S^{(n)})$ ca în Figura 5. Asocierea intrare-ieşire reprezentată de acest nou sistem de definită prin

$$\forall u \in U, h(u) = \{x | \exists y \in g(x), x \in f(u, y)\}.$$

Un caz încă mai general: avem sistemele $f_1 : U \times S^{(n)} \to P^*(S^{(p)})$, $f_2 : U \times S^{(n)} \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ şi $g : S^{(n)} \to P^*(S^{(n)})$ şi situaţia din Figura 6, unde prin f am notat legarea în paralel (f_1, f_2). Sistemul $h : U \to P^*(S^{(p+n)})$, cel care dă asocierea intrare-ieşire din Figura 6, e descris de

$$\forall u \in U, h(u) = \{(z, x) | \exists y \in g(x), z \in f_1(u, y), x \in f_2(u, y)\}. \tag{15.1}$$

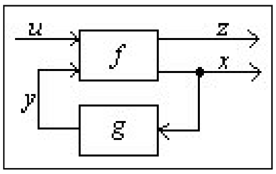

FIGURA 6

Există un caz particular al sistemului precedent h, anume acela când f, g sunt sisteme combinaţionale şi când g are funcţia identitate ca funcţie generatoare: pentru o funcţie $F : \mathbf{B}^m \times \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^p \times \mathbf{B}^n$ următoarele proprietăţi sunt satisfăcute

$$\forall(u,y) \in U \times S^{(n)}, \exists \lim_{t\to\infty} F(u(t),y(t)) \Longrightarrow \forall(z,x) \in f(u,y), \tag{15.2}$$

$$(\lim_{t\to\infty} z(t), \lim_{t\to\infty} x(t)) = \lim_{t\to\infty} F(u(t),y(t)),$$

$$\forall x \in S^{(n)}, \exists \lim_{t\to\infty} x(t) \Longrightarrow \forall y \in g(x), \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} x(t), \tag{15.3}$$

i.e. f şi g calculează pe F şi $1_{\mathbf{B}^n} : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$. Acest caz particular e numit [**14**] ***modelul Huffman*** *al circuitelor asincrone.*

Problemă deschisă *Să se caracterizeze clasa $Huff$ a sistemelor care satisfac:*

a) $\forall h \in Huff, h$ are un model Huffman, i.e. există f, g şi F care fac ca (15.1), (15.2), (15.3) să aibe loc;

b) pentru orice f, g, F care fac ca (15.2), (15.3) să aibe loc, (15.1) defineşte un sistem $h \in Huff$.

Sistemele $h \in Huff$ se numesc ***sisteme Huffman****.*

Sistemele combinaţionale, i.e. sistemele cu proprietatea că există o funcţie Booleană -numită funcţie generatoare- astfel încât afirmaţiile (15.2), (15.3) să aibe loc au fost întâlnite pentru întâia oară în Secţiunea 5 a acestui capitol în cazul particular numit 'ideal'. Astfel de sisteme vor apărea din nou în Capitolul 8 dedicat stabilităţii.

Avem posibilitatea ca în definiţia sistemelor Huffman să alegem $f = F$ i.e. f e un sistem combinaţional ideal cu $d = 0$. Să notăm $F = (F_1, F_2)$, unde $F_1 : \mathbf{B}^m \times \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^p$ şi $F_2 : \mathbf{B}^m \times \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ şi obţinem următoarea

Problemă deschisă *Să se caracterizeze clasa $Huff'$ a sistemelor care satisfac cerinţele:*

a) $\forall h \in Huff'$, există F şi g astfel încât

$$h(u) = \{F(u,y) | y \in g(F_2(u,y))\} \tag{15.4}$$

şi (15.3) sunt adevărate;

b) pentru orice F şi orice g care face ca (15.3) să aibe loc, ecuaţia (15.4) defineşte un sistem $h \in Huff'$.

CAPITOLUL 6

Accese, tranziţii şi transferuri

Acest capitol e dedicat proprietăţilor care descriu maniera în care sunt accesate şi transferate stările unui sistem. Legat de aceste lucruri, se tratează şi problema sincronicităţii.

Fie $u \in U$. **Accesul** stărilor $x \in f(u)$ la $\mu \in \mathbf{B}^n$ e proprietatea de existenţă a unui $t \in \mathbf{R}$ aşa încât $x(t) = \mu$, i.e. toate $x \in f(u)$ iau cândva valoarea μ. Prin **accesele consecutive** ale stărilor x, mai întâi la $\mu' \in \mathbf{B}^n$ şi apoi la $\mu'' \in \mathbf{B}^n$, se înţelege proprietatea

$$\forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu' \; si \; \exists t' > t, x(t') = \mu''.$$

În acestă afirmaţie observăm existenţa restricţiilor $x_{|[t,t']}$ ale lui $x \in f(u)$, numite **tranziţii**, cu $x(t) = \mu'$ şi $x(t') = \mu''$. Ele arată cum f îşi **transferă** stările de la o valoare la alta. Prin **transferul** lui f, sub u, de la μ' la μ'' se înţelege o mulţime de astfel de tranziţii.

1. Accese

OBSERVATIE 60. *Fie sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)})$, cu $U \subset S^{(m)}$ mulţime nevidă. Formulăm următoarele proprietăţi:*

(1.1) $$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu;$$

(1.2) $$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu;$$

(1.3) $$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

(1.4) $$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \forall t_0 \in \mathbf{R}, \exists t > t_0, x(t) = \mu;$$

(1.5) $$\exists \delta > 0, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t \in [t_0, t_0 + \delta], x(t) = \mu;$$

(1.6) $$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x(t) = \mu;$$

(1.7) $$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, \forall x \in f(u), x(t) = \mu;$$

(1.8) $$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, \forall x \in f(u), x(t) = \mu;$$

(1.9) $$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall t_0 \in \mathbf{R}, \exists t > t_0, \forall x \in f(u), x(t) = \mu;$$

(1.10) $$\exists \delta > 0, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t \in [t_0, t_0 + \delta], \forall x \in f(u), x(t) = \mu,$$

pentru care implicaţiile sunt

$$\begin{array}{ccccc}
(1.6) & \Longleftarrow & (1.10) & \Longleftarrow & (1.7) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
(1.1) & \Longleftarrow & (1.5) & \Longleftarrow & (1.2) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
(1.4) & \Longleftarrow & (1.3) & & \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
(1.9) & \Longleftarrow & (1.8) & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
(1.6) & & (1.10) & &
\end{array}$$

(1.1) e proprietatea cea mai slabă şi deci cea mai generală. Ea exprimă ideea că toate stările posibile ale lui f iau o valoare comună μ dacă alegem intrarea în mod corespunzător. Ea e satisfăcută, de exemplu, de sistemele deterministe şi în aceeaşi situaţie sunt (1.2), (1.6) şi (1.7).

(1.2) şi (1.3) aduc în acest context ideile de stări iniţiale/finale fără curse/constante care, în versiunea din Capitolul 4, (2.2), (2.3) şi (2.5), (2.6) au fost definite prin

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu,$$

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu.$$

Un sistem f care satisface (1.2) (respectiv (1.3)) are două subsisteme $f_2 \subset f_1 \subset f$ obţinute prin restricţia intrărilor la două submulţimi $U_2 \subset U_1 \subset U$ aşa încât f_1 are stări iniţiale fără curse şi f_2 are o stare iniţială constantă (respectiv f_1 are stări finale fără curse şi f_2 are o stare finală constantă): de exemplu, putem fixa un $u^0 \in U$ care o face adevărată pe (1.2) (respectiv pe (1.3)) şi apoi să luăm $U_1 = U_2 = \{u^0\}$.

O interpretare a lui (1.4) e următoarea: există μ şi u aşa încât $\forall x \in f(u)$, există un şir $(t_k) \in Seq$ cu $\forall k \in \mathbf{N}$, $x(t_k) = \mu$. Această afirmaţie poate reflecta existenţa stării finale (stabilitatea) dar, atunci când e adevărată pentru două valori distincte μ, μ'

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \mu \neq \mu', \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$

$$\forall t_0 \in \mathbf{R}, \exists t > t_0, x(t) = \mu \; si \; \exists t' > t_0, x(t') = \mu',$$

ea arată faptul că f intră sub intrarea u într-o buclă (instabilitate).

(1.5) e cerinţa 'f ia sub intrarea u o valoare μ şi rămâne acolo pentru mai mult decât $\delta > 0$ unităţi temporale' şi are varianta:...$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta), \ldots$ interpretată: '...rămâne acolo cel puţin $\delta > 0$ unităţi temporale'. Această proprietate trebuie asociată nu doar cu inerţia -în acest caz, orice $x \in \bigcup\limits_{u \in U} f(u)$ are o viteză 'lentă' de variaţie şi ce inseamnă 'lentă' e indicat de δ- dar de asemenea cu nevoia în procesul de modelare de a depaşi orice regiune de incertitudine -în acest caz, u e ales într-un aşa mod ca să ţină în mod intenţionat $x \in f(u)$ la valoarea μ mai mult decât δ unităţi de timp.

(1.6),...,(1.10) repetă (1.1),...,(1.5) sub o formă mai tare, când toate stările posibile ale lui f iau o valoare comună μ în mod sincron, simultan.

În plus, dacă $f = X$ e un sistem autonom, $X \in P^*(S^{(n)})$, atunci (1.1), (1.2),... iau forma

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in X, \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu,$$

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in X, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

$$...$$

cu consecinţa interesantă că, în general, în prima dintre aceste proprietăţi $\exists \mu$ nu arată existenţa unui μ unic, dar într-a doua proprietate valoarea iniţială μ a tuturor $x \in X$ e unică. Alte situaţii de existenţă unică a lui μ apar de asemenea atunci când rescriem (1.3), (1.7), (1.8) în cazul particular al sistemelor autonome.

Definitie 69. *a) Numim*

$$\Omega = \{\mu | \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu\}$$

mulţimea ***valorilor accesibile ale (stărilor) lui*** *f. Vectorii $\mu \in \Omega$ se numesc* ***valorile accesibile ale (stărilor) lui*** *f sau, în mod abuziv,* ***stările accesibile ale lui*** *f.*

Dacă $\Omega \neq \emptyset$, i.e. dacă (1.1) are loc, spunem că f ***are valori accesibile ale stărilor*** *sau, în mod abuziv, că f* ***are valori accesibile****. Obişnuim să spunem că stările lui f* ***iau (accesează) valorile*** *$\mu \in \Omega$ sau că f* ***ia valorile*** *$\mu \in \Omega$.*

Când e îndeplinită (1.1), fixăm $\mu \in \mathbf{B}^n$ şi $u \in U$. Proprietatea

$$\forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu$$

se numeşte ***accesul (stărilor) lui*** *f,* ***sub intrarea*** *u,* ***la valoarea*** *μ. Spunem că $f(u)$* ***accesează (valoarea)*** *μ.*

O terminologie şi notaţii similare sunt date pentru proprietăţile (1.2),...,(1.10) şi pentru următoarele mulţimi:

b) ***mulţimea valorilor iniţiale accesibile ale (stărilor) lui*** *f, vezi (1.2)*

$$\Theta'_0 = \{\mu | \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu\};$$

c) ***mulţimea valorilor finale accesibile ale (stărilor) lui*** *f, vezi (1.3)*

$$\Theta'_f = \{\mu | \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu\};$$

d) ***mulţimea valorilor ciclice accesibile ale (stărilor) lui*** *f, vezi (1.4)*

$$R = \{\mu | \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \forall t_0 \in \mathbf{R}, \exists t > t_0, x(t) = \mu\};$$

e) ***mulţimea valorilor $\delta-$persistente accesibile ale (stărilor) lui*** *f, vezi (1.5)*

$$\Omega_\delta = \{\mu | \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t \in [t_0, t_0 + \delta], x(t) = \mu\};$$

a') ***mulţimea valorilor sincron accesibile ale (stărilor) lui*** *f, vezi (1.6)*

$$\Omega_s = \{\mu | \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x(t) = \mu\};$$

b') ***mulţimea valorilor iniţiale sincron accesibile ale (stărilor) lui*** *f, vezi (1.7)*

$$\Theta'_{0s} = \{\mu | \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, \forall x \in f(u), x(t) = \mu\};$$

c') ***mulţimea valorilor finale sincron accesibile ale (stărilor) lui*** *f, vezi (1.8)*

$$\Theta'_{fs} = \{\mu | \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, \forall x \in f(u), x(t) = \mu\};$$

*d') **mulţimea valorilor ciclice sincron accesibile ale (stărilor) lui** f, vezi (1.9)*

$$R_s = \{\mu|\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall t_0 \in \mathbf{R}, \exists t > t_0, \forall x \in f(u), x(t) = \mu\};$$

*e') **mulţimea valorilor** $\delta-$**persistente sincron accesibile ale (stărilor) lui** f, vezi (1.10)*

$$\Omega_{\delta s} = \{\mu|\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t \in [t_0, t_0 + \delta], \forall x \in f(u), x(t) = \mu\}.$$

Observatie 61. *Implicaţiile din Observaţia 60 generează următoarele incluziuni*

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_s & \supset & \Omega_{\delta s} & \supset & \Theta'_{0s} \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \Omega & \supset & \Omega_\delta & \supset & \Theta'_0 \\ \cup & & \cup & & \\ R & \supset & \Theta'_f & & \\ \cup & & \cup & & \\ R_s & \supset & \Theta'_{fs} & & \\ \cap & & \cap & & \\ \Omega_s & & \Omega_{\delta s} & & \end{array}$$

pentru $\delta > 0$. Pe de altă parte, o nouă proprietate interesantă şi o nouă mulţime remarcabilă pot fi definite (prima implică toate proprietăţile (1.1),...,(1.10) şi ultima e inclusă în toate mulţimile $\Omega, ..., \Omega_{\delta s}$ din Definiţia 69):

Definitie 70. *Dacă*

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu,$$

atunci mulţimea

$$Eq = \{\mu|\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu\}$$

*se numeşte **mulţimea valorilor de echilibru accesibile ale (stărilor) lui** f. Orice $\mu \in Eq$ e numit **valoare de echilibru accesibilă a (stărilor) lui** f, sau **punct accesibil de echilibru al (stare de echilibru a) lui** f.*

Teoremă 200. *Dacă f e determinist, atunci toate valorile stărilor*

$$\{f(u)(t)|t \in \mathbf{R}, u \in U\}$$

sunt sincron accesibile.

Demonstraţie. Avem într-adevăr

$$\Omega_s = \{\mu|\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x(t) = \mu\} = \{f(u)(t)|t \in \mathbf{R}, u \in U\}.$$

□

Observatie 62. *În general, mulţimea valorilor iniţiale Θ_0 ale lui f*

$$\Theta_0 = \{\mu|\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu\}$$

nu conţine doar valori accesibile. Mai exact, $\Theta'_0 \subset \Theta_0$ şi există posibilitatea ca $\Theta'_0 = \emptyset$ ($\Theta_0 \neq \emptyset$ e întotdeauna adevărată). Avem următoarea

Teoremă 201. *a) Dacă ϕ_0 e univocă, atunci $\Theta'_0 \neq \emptyset$.*

b) Presupunem că f e determinist. Atunci $\Theta'_0 \neq \emptyset$ şi $\Theta'_0 = \Theta'_{0s} = \Theta_0$.

DEMONSTRAŢIE. a) Faptul că ϕ_0 e univocă, i.e. că f are stări iniţiale fără curse

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu$$

implică (1.2), i.e. $\Theta_0' \neq \emptyset$.

b) ϕ_0 e univocă, deci $\Theta_0' \neq \emptyset$ din a). Afirmaţia e evidentă. □

EXEMPLU 77. *Definim $X \subset S$ prin $X = \{0, 1\}$ (funcţiile constante). Sistemul autonom $f = X$ nu are valori accesibile deoarece pentru orice $\mu \in \mathbf{B}$ (şi pentru orice alegere a intrării $u \in U$), una dintre $0, 1$ diferă de μ.*

EXEMPLU 78. *Fie funcţia $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ şi $d \in \mathbf{R}$. Sistemul F_d are valori sincron accesibile ca orice alt sistem determinist.*

EXEMPLU 79. *Dacă stările lui f posedă proprietatea: există $\delta > 0$ aşa încât $\forall u \in U, \forall x \in f(u)$,*

$$Dx_1(t) \cup ... \cup Dx_n(t) \leq \overline{\bigcup_{\xi \in (t, t+\delta]} (Dx_1(\xi) \cup ... \cup Dx_n(\xi))}$$

(orice discontinuitate e urmată de continuitate mai mult decât δ unităţi de timp) şi dacă f are valori accesibile ale stărilor, atunci f are valori accesibile $\delta-$persistente ale stărilor.

2. Timp de acces

DEFINITIE 71. *Presupunem că $\Omega \neq \emptyset$. Proprietatea (1.1) defineşte mulţimea*

$$T_{\mu,x} = \{t | t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu\}$$

numită ***mulţimea timpului de acces a lui*** *$x \in \bigcup_{u \in U} f(u)$* ***la valoarea*** *$\mu \in \Omega$.*

OBSERVATIE 63. *Fie $\mu \in \Omega$ şi $x \in \bigcup_{u \in U} f(u)$. Atunci $T_{\mu,x} \neq \emptyset$ implică, datorită continuităţii la dreapta a lui x, că avem*

$$\forall t \in T_{\mu,x}, \exists \varepsilon > 0, [t, t + \varepsilon) \subset T_{\mu,x}.$$

Pe de altă parte, există definiţii similare definiţiei precedente şi pentru accesele (1.2),...,(1.10), fiind satisfăcute proprietăţi de tipul: în (1.2)

$$\forall t \in T_{\mu,x}, (-\infty, t) \subset T_{\mu,x},$$

cu $\mu \in \Theta_0'$, în (1.3)

$$\forall t \in T_{\mu,x}, [t, \infty) \subset T_{\mu,x},$$

cu $\mu \in \Theta_f'$ etc.

3. Accese consecutive

OBSERVATIE 64. *Să considerăm sistemul f. Mai întâi, remarcăm echivalenţa afirmaţiilor*

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu'$$

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t'' \in \mathbf{R}, x(t'') = \mu''$$

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t'' > t', x(t'') = \mu''$$

obţinute din (1.1): în timp ce în afirmaţia a doua e posibil să luăm $\mu' = \mu''$ şi $t' = t''$, în a treia afirmaţie putem lua $\mu' = \mu''$ din nou şi, din continuitatea la dreapta a lui x, t'' ca fiind foarte aproape de t'. Cu alte cuvinte, accesul stărilor lui

f, sub o intrare u, la o valoare μ' e echivalent cu accesele consecutive ale stărilor lui f, sub o intrare u, mai întâi la o valoare μ' şi apoi la o valoare μ''.

De aici sugestia de a combina două câte două (1.1),...,(1.5) lucru care ne face să obţinem următoarele grupe de proprietăţi.

***Grupa 1** de proprietăţi în care combinăm (1.1) cu (1.1),...,(1.5):*

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \; si \; \exists t'' > t', x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \; si \; \exists t > t', \forall t'' < t, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \; si \; \exists t \in \mathbf{R}, \forall t'' \geq t, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \; si \; \forall t \in \mathbf{R}, \exists t'' > t, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}\exists\delta > 0, \exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \; si \; \exists t > t' - \delta, \forall t'' \in [t, t+\delta], x(t'') = \mu''.\end{gathered} \tag{3.5}$$

***Grupa a 2-a** de proprietăţi în care combinăm (1.2) cu (1.1),...,(1.5):*

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t \in \mathbf{R}, \forall t' < t, x(t') = \mu' \; si \; \exists t'' \in \mathbf{R}, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t \in \mathbf{R}, \forall t' < t, x(t') = \mu' \; si \; \exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall t'' < t_1, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t \in \mathbf{R}, \forall t' < t, x(t') = \mu' \; si \; \exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall t'' \geq t_1, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t \in \mathbf{R}, \forall t' < t, x(t') = \mu' \; si \; \forall t_1 \in \mathbf{R}, \exists t'' > t_1, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered}\exists\delta > 0, \exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t \in \mathbf{R}, \forall t' < t, x(t') = \mu' \; si \; \exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall t'' \in [t_1, t_1+\delta], x(t'') = \mu''.\end{gathered} \tag{3.10}$$

***Grupa a 3-a** de proprietăţi în care combinăm (1.3) cu (1.1),...,(1.5):*

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \geq t, x(t') = \mu' \; si \; \exists t'' > t, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \geq t, x(t') = \mu' \; si \; \exists t_1 > t, \forall t'' < t_1, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \geq t, x(t') = \mu' \; si \; \exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall t'' \geq t_1, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),\\ \exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \geq t, x(t') = \mu' \; si \; \forall t_1 \in \mathbf{R}, \exists t'' > t_1, x(t'') = \mu'',\end{gathered} \tag{3.14}$$

$$\exists\delta > 0, \exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \tag{3.15}$$

$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \geq t, x(t') = \mu' \textit{ si } \exists t_1 > t - \delta, \forall t'' \in [t_1, t_1 + \delta], x(t'') = \mu''.$$

Grupa a 4-a *de proprietăţi în care combinăm (1.4) cu (1.1),...,(1.5):*

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists t' > t, x(t') = \mu' \textit{ si } \exists t'' > t', x(t'') = \mu'', \tag{3.16}$$

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists t' > t, x(t') = \mu' \textit{ si } \exists t_1 > t', \forall t'' < t_1, x(t'') = \mu'', \tag{3.17}$$

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists t' > t, x(t') = \mu' \textit{ si } \exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall t'' \geq t_1, x(t'') = \mu'', \tag{3.18}$$

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists t' > t, x(t') = \mu' \textit{ si } \forall t_1 \in \mathbf{R}, \exists t'' > t_1, x(t'') = \mu'', \tag{3.19}$$

$$\exists \delta > 0, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists t' > t, x(t') = \mu' \textit{ si } \exists t_1 > t' - \delta, \forall t'' \in [t_1, t_1 + \delta], x(t'') = \mu''. \tag{3.20}$$

Grupa a 5-a *de proprietăţi în care combinăm (1.5) cu (1.1),...,(1.5):*

$$\exists \delta > 0, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \in [t, t + \delta], x(t') = \mu' \textit{ si } \exists t'' > t, x(t'') = \mu'', \tag{3.21}$$

$$\exists \delta > 0, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \in [t, t + \delta], x(t') = \mu' \textit{ si } \exists t_1 > t, \forall t'' < t_1, x(t'') = \mu'', \tag{3.22}$$

$$\exists \delta > 0, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \in [t, t + \delta], x(t') = \mu' \textit{ si } \exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall t'' \geq t_1, x(t'') = \mu'', \tag{3.23}$$

$$\exists \delta > 0, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \in [t, t + \delta], x(t') = \mu' \textit{ si } \forall t_1 \in \mathbf{R}, \exists t'' > t_1, x(t'') = \mu'', \tag{3.24}$$

$$\exists \delta > 0, \exists \delta' > 0, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \in [t, t + \delta], x(t') = \mu' \textit{ si } \exists t_1 > t - \delta', \forall t'' \in [t_1, t_1 + \delta'], x(t'') = \mu''. \tag{3.25}$$

Cea mai slabă cerinţă dintre (3.1), ...,(3.25) este (3.1).

Toate proprietăţile (3.1), ...,(3.25) constau în existenţa a două accese şi o ordine de a lua valorile accesibile, mai întâi μ' şi apoi μ'', unde μ' şi μ'' pot fi egale. Accesele au loc sub aceaşi intrare u şi avem $\forall x \in f(u)$, $\exists t' \in T_{\mu',x}$, $\exists t'' \in T_{\mu'',x}$, $t' < t''$.

După cum se poate vedea, aceste 25 de proprietăţi nu iau în considerare accesele sincrone (1.6),...,(1.10). Atunci când le-am scris am încercat să simplificăm expunerea, dar vom ţine minte că există cazuri particulare sincrone ale acestor afirmaţii. De exemplu, (3.1) are următoarele cazuri particulare de sincronism al primului acces, respectiv al celui de-al doilea acces, respectiv al ambelor accese:

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U,$$
$$\exists t' \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x(t') = \mu' \textit{ si } \exists t'' > t', x(t'') = \mu'',$$

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U,$$
$$\exists t'' \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \exists t' < t'', x(t') = \mu' \textit{ si } x(t'') = \mu'',$$

$$\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U,$$
$$\exists t' \in \mathbf{R}, \exists t'' > t', \forall x \in f(u), x(t') = \mu' \text{ si } x(t'') = \mu''.$$

DEFINITIE 72. *a) Numim*

$$\Omega \otimes \Omega = \{(\mu', \mu'')|\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U,$$
$$\forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t'' > t', x(t'') = \mu''\}$$

mulţimea perechilor de valori accesibile consecutive *(sau **succesive**) **ale (stărilor) lui** f.*

*Dacă $\Omega \otimes \Omega \neq \emptyset$, însemnând că (3.1) e satisfăcut, spunem că f **are valori accesibile consecutive ale stărilor** sau, abuziv, că f **are stări accesibile consecutive**, iar pentru $(\mu', \mu'') \in \Omega \otimes \Omega$ că există $u \in U$ cu proprietatea că stările $x \in f(u)$ **iau (accesează) mai întâi valoarea** μ', **apoi valoarea** μ''.*

Să presupunem că (3.1) are loc şi să fixăm pe μ', μ'', u. Avem proprietatea

$$\forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t'' > t', x(t'') = \mu'',$$

*pe care o numim **accesele consecutive ale (stărilor) lui** f, **sub intrarea** u, **mai întâi la** μ', **apoi la** μ''. Când e satisfăcută, spunem uneori că $f(u)$ **transferă** μ' **în** μ''.*

Terminologia şi notaţiile sunt similare pentru proprietăţile (3.2),...,(3.25) şi pentru următoarele mulţimi:

*b) **mulţimea perechilor de valori accesibile consecutive** (μ', μ'') **ale lui** f, μ''**-iniţial** (vezi (3.2))*

$$\Omega \otimes \Theta'_0 = \{(\mu', \mu'')|\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U,$$
$$\forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t > t', \forall t'' < t, x(t'') = \mu''\};$$

...

*c) **mulţimea perechilor de valori accesibile consecutive** (μ', μ'') **ale lui** f, μ' $\delta-$**persistent**, μ'' $\delta'-$**persistent** (vezi (3.25))*

$$\Omega_\delta \otimes \Omega_{\delta'} = \{(\mu', \mu'')|\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \in [t, t+\delta], x(t') = \mu' \text{ si } \exists t_1 > t - \delta', \forall t'' \in [t_1, t_1 + \delta'], x(t'') = \mu''\}.$$

TEOREMĂ 202. *a) Proprietatea (3.1) e echivalentă cu (1.1).*

b) Proprietăţile (3.2), (3.6), (3.7), (3.10) şi (3.22) sunt echivalente cu (1.2).

c) Proprietăţile (3.3), (3.11), (3.13), (3.14), (3.15), (3.18) şi (3.23) sunt echivalente cu (1.3).

d) Proprietăţile (3.4), (3.16) şi (3.19) sunt echivalente cu (1.4).

e) Proprietăţile (3.5), (3.21) şi (3.25) sunt echivalente cu (1.5).

f) Proprietăţile (3.12) şi (3.17) sunt echivalente cu

$$\exists\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu \tag{3.26}$$

i.e. existenţa unui punct de echilibru.

DEMONSTRAŢIE. În general, aceste echivalenţe sunt uşor de demonstrat. Dăm exemplul lui (3.2) $\Longleftrightarrow$ (1.2).

(3.2) $\Longrightarrow$ (1.2) Din (3.2) obţinem

$$\exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, \forall t'' < t, x(t'') = \mu'',$$

i.e. (1.2).

(1.2) $\Longrightarrow$ (3.2) Din (1.2) avem

$$\exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, \exists t' < t, x(t') = \mu'' \text{ si } \forall t'' < t, x(t'') = \mu'',$$

$$\exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu'' \text{ si } \exists t > t', \forall t'' < t, x(t'') = \mu''$$

şi rezultă (3.2). □

COROLAR 1. *Dintre (1.1),...,(1.5),(3.1),...,(3.25),(3.26) următoarele proprietăţi sunt distincte.*

a) (1.1):

$$\exists\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu,$$

b) (1.2):

$$\exists\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu,$$

c) (1.3):

$$\exists\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu,$$

d) (1.4):

$$\exists\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \forall t_0 \in \mathbf{R}, \exists t > t_0, x(t) = \mu,$$

e) (1.5):

$$\exists\delta > 0, \exists\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t \in [t_0, t_0 + \delta], x(t) = \mu,$$

f) (3.26):

$$\exists\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu,$$

g) (3.8):

$$\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$

$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall t' < t, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall t'' \geq t_1, x(t'') = \mu'',$$

h) (3.9):

$$\exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$

$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall t' < t, x(t') = \mu' \text{ si } \forall t_1 \in \mathbf{R}, \exists t'' > t_1, x(t'') = \mu'',$$

i) (3.20):

$$\exists\delta > 0, \exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$

$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists t' > t, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t_1 > t' - \delta, \forall t'' \in [t_1, t_1 + \delta], x(t'') = \mu'',$$

j) (3.24):

$$\exists\delta > 0, \exists\mu' \in \mathbf{B}^n, \exists\mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$

$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall t' \in [t, t + \delta], x(t') = \mu' \text{ si } \forall t_1 \in \mathbf{R}, \exists t'' > t_1, x(t'') = \mu''.$$

OBSERVATIE 65. *Câteva dintre implicaţiile care caracterizează proprietăţile din Corolar sunt următoarele*

$$\begin{array}{ccccc}
(3.8) & \Longleftarrow & (3.26) & \Longrightarrow & (3.20) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
(3.9) & \Longrightarrow & (3.24) & &
\end{array}$$

4. Tranziţii

DEFINITIE 73. *Fie* $x \in S^{(n)}$ *şi să luăm numerele reale* $t_1 < t_2$. *Restricţia* $\gamma = x_{|[t_1,t_2]}$ *se numeşte* ***tranziţia lui*** x ***de la*** *(**valoarea**)* $x(t_1)$ ***la*** *(**valoarea**)* $x(t_2)$[1]. $[t_1, t_2]$ *se numeşte* ***intervalul suport*** *al tranziţiei şi numărul* $t_2 - t_1$ *se numeşte* ***durata*** *tranziţiei.*

Dacă x *e constant în intervalul* $[t_1, t_2]$, *atunci tranziţia se numeşte* ***constantă,*** *sau* ***trivială*** *şi dacă* x *e monotonă pe coordonate în intervalul* $[t_1, t_2]$, *atunci tranziţia se numeşte* ***monotonă.***

DEFINITIE 74. *Avem următoarea lege parţială de compunere a tranziţiilor. Considerăm* $x', x'' \in S^{(n)}$ *şi numerele* $t_1 < t_2 < t_3$; *dacă* $x'(t_2) = x''(t_2)$, *atunci există* $x \in S^{(n)}$ *care satisface*

$$\forall t \in [t_1, t_3], x(t) = \begin{cases} x'(t), t \in [t_1, t_2] \\ x''(t), t \in [t_2, t_3] \end{cases}.$$

Tranziţia $\gamma = x_{|[t_1,t_3]}$ *se notează prin* $\gamma' \vee \gamma''$ *şi se numeşte* ***reuniunea*** *lui* $\gamma' = x'_{|[t_1,t_2]}$ *cu* $\gamma'' = x''_{|[t_2,t_3]}$ *(în această ordine).*

OBSERVATIE 66. *O terminologie similară e utilizată pentru restricţia* $\gamma_{|(-\infty,t_2]}$, *numită tranziţia lui* x *de la* $x(-\infty+0)$ *la* $x(t_2)$. *Dacă* x', x'' *satisfac* $x'(t_1) = x''(t_1)$, *atunci există* x *care satisface*

$$\forall t \in (-\infty, t_2], x(t) = \begin{cases} x'(t), t \in (-\infty, t_1] \\ x''(t), t \in [t_1, t_2] \end{cases}.$$

Pentru $\gamma' = x'_{|(-\infty,t_1]}, \gamma'' = x''_{|[t_1,t_2]}$, $x_{|(-\infty,t_2]}$ *se notează cu* $\gamma = \gamma' \vee \gamma''$.

Sunt posibile şi alte construcţii de acelaşi tip.

5. Mulţimea intervalelor suport

DEFINITIE 75. *Dacă* $\Omega \otimes \Omega \neq \emptyset$ *(vezi Definiţia 72 a)) atunci proprietatea (3.1) defineşte o mulţime analoagă lui* $T_{\mu,x}$ *din Definiţia 71, anume*

$$T_{\mu',\mu'',x} = \{[t', t''] | t' < t'', x(t') = \mu' \text{ si } x(t'') = \mu''\},$$

numită ***mulţimea intervalelor suport ale tranziţiilor*** $x_{|[t',t'']}$, *unde* $(\mu', \mu'') \in \Omega \otimes \Omega$ *şi* $x \in \bigcup_{u \in U} f(u)$.

EXEMPLU 80. *Sistemul* $f : S \to P^*(S)$ *definit de*

$$\bigcap_{\xi \in [t-1,t]} u(\xi) \leq x(t)$$

satisface $\bigcup_{u \in S} f(u) = S$. *Pentru* $x = \chi_{[0,1)} \oplus \chi_{[2,\infty)}, x \in S$ *avem*

$$T_{0,1,x} = \{[t', t''] | t' < t'', t' \in (-\infty, 0) \cup [1, 2), t'' \in [0, 1) \cup [2, \infty)\},$$
$$T_{1,1,x} = \{[t', t''] | t' < t'', t', t'' \in [0, 1) \cup [2, \infty)\}.$$

OBSERVATIE 67. *Definiţii similare Definiţiei 75 au loc atunci când utilizăm restul proprietăţilor de accese consecutive (3.1),...,(3.25). Dăm exemplul lui (3.20), care defineşte mulţimea* $R \otimes \Omega_\delta$, $\delta > 0$ *în acest mod:*

$$R \otimes \Omega_\delta = \{(\mu', \mu'') | \mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u),$$
$$\forall t \in \mathbf{R}, \exists t' > t, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t_1 > t' - \delta, \forall t'' \in [t_1, t_1 + \delta], x(t'') = \mu''\}.$$

[1] În geometrie aceste funcţii pot fi numite curbe sau drumuri.

Dacă $(\mu',\mu'')\in R\otimes\Omega_\delta$ *şi* $x\in\bigcup\limits_{u\in U}f(u)$, *atunci (3.20) defineşte mulţimea* $T_{\mu',\mu'',x}$ *care satisface: există şirurile* $(t_k),(t'_k)\in Seq$ *aşa încât* $\forall k\in\mathbf{N},t_k\in T_{\mu',x},[t'_k,t'_k+\delta]\subset T_{\mu'',x}$, $t_k<t'_k+\delta$ *şi* $[t_k,t'_k+\delta]\in T_{\mu',\mu'',x}$.

6. Transferuri

DEFINITIE 76. *Fixăm în (3.1)* $\mu',\mu''\in\mathbf{B}^n$ *şi* $u\in U$. *Accesele consecutive ale stărilor lui* f, *aflat sub intrarea* u, *la* μ' *şi* μ'' *în această ordine*

$$\forall x\in f(u),\exists t'\in\mathbf{R},x(t')=\mu'\ si\ \exists t''>t',x(t'')=\mu''$$

definesc mulţimea de tranziţii

$$\mu'\overset{u}{\rightrightarrows}\mu''=\{x_{|[t',t'']}|[t',t'']\in T_{\mu',\mu'',x},x\in f(u)\}$$

numită ***transferul plin al (stărilor) lui*** f, ***sub intrarea*** u, ***de la (valoarea)*** μ' ***la (valoarea)*** μ'' *şi submulţimile sale nevide*

$$\mu'\xrightarrow{u}\mu''\subset\mu'\overset{u}{\rightrightarrows}\mu''$$

se numesc ***transferuri ale lui*** f, ***sub intrarea*** u, ***de la*** μ' ***la*** μ''.

OBSERVATIE 68. *Similar Definiţiei 76, avem că*

$$\forall x\in f(u),\exists t'\in\mathbf{R},x_{|(-\infty,t')}=\mu'\ si\ \exists t''>t',x(t'')=\mu''$$

defineşte transferul plin

$$\mu'\overset{u}{\rightrightarrows}\mu''=\{x_{|(-\infty,t'']}|(-\infty,t'']\in T_{\mu',\mu'',x},x\in f(u)\}.$$

Ca şi în cazul lui $T_{\mu',\mu'',x}$, *atunci când scriem* $\mu'\xrightarrow{u}\mu''$ *sistemul la care se referă acest transfer e subînţeles. Dacă e necesar, pentru a evita ambiguităţile, sau vom menţiona explicit sistemul, sau îl vom indica sub forma unui indice inferior:* $(\mu'\xrightarrow{u}\mu'')_f$, $(\mu'\overset{u}{\rightrightarrows}\mu'')_f$.

Incluziunile, intersecţiile şi reuniunile transferurilor se definesc prin incluziunile, intersecţiile şi reuniunile mulţimilor, făcute în mod uzual. O altă reuniune a transferurilor, notată prin $\vee$ *nu prin* $\cup$ *şi indusă de reuniunea tranziţiilor* $\gamma'\vee\gamma''$, *va fi dată în Definiţia 78.*

Transferul dual al lui $\mu'\xrightarrow{u}\mu''$ *e*

$$(\mu'\xrightarrow{u}\mu'')^*=\{\overline{x}_{|[t',t'']}|x_{|[t',t'']}\in\mu'\xrightarrow{u}\mu''\},$$

$$(\mu'\xrightarrow{u}\mu'')^*\subset\{\overline{x}_{|[t',t'']}|[t',t'']\in T_{\overline{\mu'},\overline{\mu''},\overline{x}},\overline{x}\in f^*(\overline{u})\}.$$

El e un transfer al stărilor lui f^*, *făcut sub intrarea* $\overline{u}$, *de la valoarea* $\overline{\mu'}$ *la valoarea* $\overline{\mu''}$.

Un transfer al lui f^{-1} *e*

$$\lambda'\xrightarrow{x}\lambda''\subset\{u_{|[t',t'']}|[t',t'']\in T_{\lambda',\lambda'',u},u\in f^{-1}(x)\},$$

unde $\lambda',\lambda''\in\mathbf{B}^m$ *şi* $x\in\bigcup\limits_{u\in U}f(u)$.

Transferurile produsului cartezian $f\times f'$, *ale legării în paralel* (f,f'_1) *şi ale legării în serie* $h\circ f$ *sunt următoarele submulţimi nevide*

$$(\mu',\widetilde{\mu}')\xrightarrow{u\times u'}(\mu'',\widetilde{\mu}'')\subset$$

$$\subset\{(x\times x')_{|[t',t'']}|[t',t'']\in T_{\mu',\mu'',x}\cap T_{\widetilde{\mu}',\widetilde{\mu}'',x'},x\times x'\in(f\times f')(u\times u')\},$$

$$(\mu', \widetilde{\mu}') \xrightarrow{v} (\mu'', \widetilde{\mu}'') \subset$$
$$\subset \{(x \times x')_{|[t',t'']} | [t', t''] \in T_{\mu',\mu'',x} \cap T_{\widetilde{\mu}',\widetilde{\mu}'',x'}, x \times x' \in (f, f_1')(v)\},$$
$$\nu' \xrightarrow{u} \nu'' \subset \{z_{|[t',t'']} | [t', t''] \in T_{\nu',\nu'',z}, z \in (h \circ f)(u)\}$$

iar transferurile lui $f \cap g$, $f \cup g$ *sunt cele care satisfac*

$$\mu' \xrightarrow{u''} \mu'' \subset \{x_{|[t',t'']} | [t', t''] \in T_{\mu',\mu'',x}, x \in (f \cap g)(u'')\},$$

$$\mu' \xrightarrow{\widetilde{u}} \mu'' \subset \{x_{|[t',t'']} | [t', t''] \in T_{\mu',\mu'',x}, x \in (f \cup g)(\widetilde{u})\},$$

unde $\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n$, $\widetilde{\mu}', \widetilde{\mu}'' \in \mathbf{B}^{n'}$, $\nu', \nu'' \in \mathbf{B}^p$, $u \in U$, $u' \in U'$, $v \in U \cap U_1'$, $u'' \in \{\widetilde{v} | \widetilde{v} \in U \cap V, f(\widetilde{v}) \cap g(\widetilde{v}) \neq \emptyset\}$, $\widetilde{u} \in U \cup V$; $U_1', V \in P^*(S^{(m)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$ *sunt domeniile de definiţie ale lui* f_1', g, h, f' *şi s-a presupus că* $(f, f_1'), h \circ f, f \cap g$ *există.*

Toate aceste definiţii sunt de asemenea posibile după înlocuirea lui (3.1) cu una dintre (3.2),...,(3.25).

Pe de altă parte, în transferul $\mu' \xrightarrow{u} \mu''$, *unul sau ambele accese pot fi sincrone. Avem următoarea*

Definitie 77. *Dacă în (3.1) accesele sunt sincrone*

$$\exists t' \in \mathbf{R}, \exists t'' > t', \forall x \in f(u), x(t') = \mu' \text{ si } x(t'') = \mu'',$$

cu μ', μ'', u *fixate, atunci transferul* $\mu' \xrightarrow{u} \mu''$ *se numeşte* ***sincron***.

Definitie 78. *Fie* $u \in U$ *şi* $\mu \xrightarrow{u} \mu'$, $\mu' \xrightarrow{u} \mu''$ *două transferuri, pentru care am presupus că* $(\mu, \mu'), (\mu', \mu'') \in \Omega \otimes \Omega$ *şi, mai mult, că următoarea proprietate*

$$\forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu \text{ si } \exists t' > t, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t'' > t', x(t'') = \mu''$$

e satisfăcută. Definim legea parţială de compunere

$$(\mu \xrightarrow{u} \mu') \vee (\mu' \xrightarrow{u} \mu'') = \{\gamma | \exists \gamma' \in \mu \xrightarrow{u} \mu', \exists \gamma'' \in \mu' \xrightarrow{u} \mu'', \gamma = \gamma' \vee \gamma''\}.$$

Transferul $(\mu \xrightarrow{u} \mu') \vee (\mu' \xrightarrow{u} \mu'')$ *se numeşte* ***reuniunea*** *transferurilor* $\mu \xrightarrow{u} \mu'$ *şi* $\mu' \xrightarrow{u} \mu''$ *(în acestă ordine).*

Exemplu 81. *Fie sistemul autonom determinist* $f : S \to S$ *care satisface* $x = f(u) = \chi_{[0,1)}$ *pentru orice* $u \in U$ *şi alegem* $\mu, \mu', \mu'' \in \mathbf{B}$, $\mu = \mu'' = 0$, $\mu' = 1$. *Avem*

$$T_{0,1,x} = \{[t, t'] | t \in (-\infty, 0), t' \in [0, 1)\},$$
$$T_{1,0,x} = \{[t', t''] | t' \in [0, 1), t'' \in [1, \infty)\},$$
$$T_{0,0,x} = \{[t, t''] | t < t'', t, t'' \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)\},$$

$$\begin{aligned}(0 \overset{u}{\rightrightarrows} 1) \vee (1 \overset{u}{\rightrightarrows} 0) &= \{x_{|[t,t'']} | \exists t', [t, t'] \in T_{0,1,x}, [t', t''] \in T_{1,0,x}\} = \\ &= \{\chi_{[0,1)|[t,t'']} | t \in (-\infty, 0), t'' \in [1, \infty)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0 \overset{u}{\rightrightarrows} 0) &= \{x_{|[t,t'']} | [t, t''] \in T_{0,0,x}\} = \\ &= \{\chi_{[0,1)|[t,t'']} | t < t'', t, t'' \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)\}.\end{aligned}$$

Acest exemplu ne arată că, în general, avem $(\mu \overset{u}{\rightrightarrows} \mu') \vee (\mu' \overset{u}{\rightrightarrows} \mu'') \subset (\mu \overset{u}{\rightrightarrows} \mu'')$.

OBSERVATIE 69. $\mu' \overset{u}{\rightrightarrows} \mu''$ *dă toate posibilităţile ca* $x \in f(u)$ *să acceseze mai întâi valoarea accesibilă* μ' *şi apoi valoarea accesibilă* μ'' *iar* $\mu' \xrightarrow{u} \mu''$ *ignoră unele dintre aceste posibilităţi.*

Reuniunea $(\mu \overset{u}{\rightrightarrows} \mu') \vee (\mu' \overset{u}{\rightrightarrows} \mu'')$ *nu produce pierderi; ea indică modalităţile în care* μ, μ', μ'' *pot fi accesate în această ordine, ceea ce reprezintă doar unele dintre modalităţile în care* μ, μ'' *pot fi accesate, în această ordine.*

7. Transferurile sistemelor neanticipative

TEOREMĂ 203. *Presupunem că sistemul* f *satisface condiţiile:*
a) U *e închisă sub translaţii şi sub 'concatenare'*

$$\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in U, u \circ \tau^d \in U,$$

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U, u \cdot \chi_{(-\infty,t)} \oplus v \cdot \chi_{[t,\infty)} \in U;$$

b) neanticipativitate $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\};$$

*c) neanticipativitate** $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,

$$(u_{|[t,\infty)} = v_{|[t,\infty)} \text{ si } \{x(t) | x \in f(u)\} = \{y(t) | y \in f(v)\}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \{x_{|[t,\infty)} | x \in f(u)\} = \{y_{|[t,\infty)} | y \in f(v)\};$$

d) invarianţă în timp

$$\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in U, f(u \circ \tau^d) = \{x \circ \tau^d | x \in f(u)\};$$

e) se dau t_1, $t_2 \in \mathbf{R}$, $u^0, u^1 \in U$ *şi* $\mu, \mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n$ *aşa încât au loc*

$$\forall x \in f(u^0), \exists t_0 < t_1, x(t_0) = \mu, \tag{7.1}$$

$$\forall x \in f(u^0), x(t_1) = \mu', \tag{7.2}$$

$$\forall x' \in f(u^1), x'(t_2) = \mu', \tag{7.3}$$

$$\forall x' \in f(u^1), \exists t_3 > t_2, x'(t_3) = \mu''. \tag{7.4}$$

Să notăm $d = t_1 - t_2$. *Atunci* $\widetilde{u} \in U$ *definit prin*

$$\widetilde{u} = u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus (u^1 \circ \tau^d) \cdot \chi_{[t_1,\infty)}, \tag{7.5}$$

satisface

$$\forall \widetilde{x} \in f(\widetilde{u}), \exists t_0 < t_1, \widetilde{x}(t_0) = \mu, \tag{7.6}$$

$$\forall \widetilde{x} \in f(\widetilde{u}), \exists t_3' > t_1, \widetilde{x}(t_3') = \mu''. \tag{7.7}$$

Aşadar, dacă $f(u^0)$ *transferă* μ *în* μ', *ultimul acces fiind sincron şi dacă* $f(u^1)$ *transferă* μ' *în* μ'', *cu primul acces sincron, atunci* $f(\widetilde{u})$ *transferă* μ *în* μ''.

DEMONSTRAŢIE. Din a) $\widetilde{u}$ îi aparţine lui U, într-adevăr. Remarcăm că avem

$$\widetilde{u}_{|(-\infty,t_1)} = u^0_{|(-\infty,t_1)}. \tag{7.8}$$

Ţinând cont de (7.8) şi b) deducem

$$\{\widetilde{x}_{|(-\infty,t_1]} | \widetilde{x} \in f(\widetilde{u})\} = \{x_{|(-\infty,t_1]} | x \in f(u^0)\} \tag{7.9}$$

şi dacă mai luăm în considerare (7.1), (7.2), atunci obţinem adevărul lui (7.6) şi a lui

$$\forall \widetilde{x} \in f(\widetilde{u}), \widetilde{x}(t_1) = \mu'. \tag{7.10}$$

Fie acum un $x'' \in f(u^1 \circ \tau^d)$ arbitrar. Datorită lui d) obţinem existenţa unui $x' \in f(u^1)$ aşa încât $x'' = x' \circ \tau^d$ şi avem $x''(t_1) = (x' \circ \tau^d)(t_1) = x'(t_2) = \mu'$ (am ţinut cont de (7.3)) aşadar

$$\forall x'' \in f(u^1 \circ \tau^d), x''(t_1) = \mu' \tag{7.11}$$

şi, în mod similar,

$$\forall x'' \in f(u^1 \circ \tau^d), \exists t_3' > t_1, x''(t_3') = \mu''. \tag{7.12}$$

Se vede că

$$\widetilde{u}_{|[t_1,\infty)} = (u^1 \circ \tau^d)_{|[t_1,\infty)}. \tag{7.13}$$

Ipoteza lui c) e îndeplinită de t_1, $\widetilde{u}$ şi $u^1 \circ \tau^d$, după cum rezultă din (7.10), (7.11) şi (7.13). Concluzia lui c) exprimă faptul că

$$\{\widetilde{x}_{|[t_1,\infty)} | \widetilde{x} \in f(\widetilde{u})\} = \{x''_{|[t_1,\infty)} | x'' \in f(u^1 \circ \tau^d)\} \tag{7.14}$$

şi, din (7.12), obţinem că (7.7) e adevărată. □

OBSERVATIE 70. *Ne punem problema de a defini reuniunea transferurilor* $(\mu \stackrel{u}{\to} \mu') \vee (\mu' \stackrel{v}{\to} \mu'')$ *într-o altă formă decât cea din Definiţia 78, în care am avut* $u = v$. *Pentru ca acest lucru să devină posibil, considerăm că următoarele cerinţe sunt naturale: există* $t' \in \mathbf{R}$ *aşa încât*

$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu', \tag{7.15}$$

$$\forall y \in f(v), y(t') = \mu', \tag{7.16}$$

$$u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, \tag{7.17}$$

plus cerinţa de neanticipativitate a lui f *care, împreună cu (7.17), implică adevărul lui*

$$\{x_{|(-\infty,t']} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t']} | y \in f(v)\}. \tag{7.18}$$

În acest moment cerinţa de neanticipativitate e crucială, deoarece ea ne permite să trecem de la intrarea* u *la intrarea* $u \cdot \chi_{(-\infty,t')} \oplus v \cdot \chi_{[t',\infty)}$.

Aceasta e ideea din Teorema 203. Plecând de la transferurile următoare, în care t_1 *şi* t_2 *sunt fixate*

$$\mu \stackrel{u^0}{\rightrightarrows} \mu' = \{x_{|[t_0,t_1]} | \exists t_0 < t_1, [t_0,t_1] \in T_{\mu,\mu',x}, x \in f(u^0)\},$$

$$\mu' \stackrel{u^1}{\rightrightarrows} \mu'' = \{x'_{|[t_2,t_3]} | \exists t_3 > t_2, [t_2,t_3] \in T_{\mu',\mu'',x'}, x' \in f(u^1)\}$$

teorema arată existenţa transferului

$$(\mu \stackrel{u^0}{\rightrightarrows} \mu') \vee (\mu' \stackrel{u^1 \circ \tau^d}{\rightrightarrows} \mu'') =$$

$$= \{\widetilde{x}_{|[t_0,t_3']} | \exists t_0 < t_1, [t_0,t_1] \in T_{\mu,\mu',\widetilde{x}}, \exists t_3' > t_1, [t_1,t_3'] \in T_{\mu',\mu'',\widetilde{x}}, \widetilde{x} \in f(\widetilde{u})\}.$$

Preţul pe care îl plătim pentru a face această construcţie posibilă e sincronismul accesului stărilor lui f, *sub intrările* u^0 *şi* u^1 *la valoarea* μ'. *În plus, deoarece (7.15), (7.16) sunt îndeplinite sub forma:* $u = u^0, t' = t_1$ *în primul caz şi sub forma*

$y = x', v = u^1, t' = t_2$ în cel de-al doilea caz, avem nevoie să translatăm stările x' şi intrarea u^1, $x' \in f(u^1)$ cu d unităţi de timp. Aşadar cerinţa de invarianţă în timp e şi ea prezentă.

8. Sincronismul

OBSERVATIE 71. *Considerăm sistemul $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $V \in P^*(S^{(m)})$ şi pornim de la proprietatea (1.1), scrisă pentru acest sistem*

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in V, \forall x \in g(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu.$$

Subsistemul $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \subset V$, definit de

$$U = \{u | u \in V, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in g(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu\},$$
$$\forall u \in U, f(u) = g(u)$$

satisface

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu. \tag{8.1}$$

Menţionăm şi următoarele variante mai tari ale lui (8.1):

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x(t) = \mu \tag{8.2}$$

şi

$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), x(t) = \mu. \tag{8.3}$$

Cititorul e invitat să reflecteze la aceste proprietăţi. Pornind de la ipoteza că sistemul g are valori accesibile ale stărilor, am definit subsistemul său f care satisface (8.1), aşa încât putem asocia fiecărei intrări $u \in U$ mulţimea

$$\Omega_u = \{\mu | \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu\}$$

a valorilor accesibile ale stărilor lui f sub intrarea u. Desigur, Ω_u şi $\Omega = \bigcup_{u \in U} \Omega_u$ sunt aceleaşi pentru ambele sisteme f şi g.

Pentru $u \in U$ arbitrar, în general, mulţimea timpului de acces $T_{\mu,x}$ a lui $x \in f(u)$ la valoarea $\mu \in \Omega_u$ depinde de alegerea lui x. Remarcăm că în (8.2) avem

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \Omega_u, \bigcap_{x \in f(u)} T_{\mu,x} \neq \emptyset$$

şi în (8.3) avem

$$\exists A \in P^*(\mathbf{R}), \forall u \in U, \exists \mu \in \Omega_u, A \subset \bigcap_{x \in f(u)} T_{\mu,x}.$$

*Spunem că timpul de acces al stărilor lui f la valoarea μ e **nemărginit** în (8.1), **mărginit** în (8.2) şi **fix** în (8.3).*

Când în (8.1) $u \in U$ satisface $|\Omega_u| > 1$, există două posibilităţi: elementele lui Ω_u sunt accesate de $x \in f(u)$ într-o ordine arbitrară

$$\forall u \in U, \forall \mu \in \Omega_u, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu,$$

sau ordinea contează; atunci e adevărată una dintre afirmaţiile:

$$\forall u \in U, \exists k \geq 1, \exists \mu^1 \in \mathbf{B}^n, ..., \exists \mu^k \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_1 \in \mathbf{R}, ..., \exists t_k \in \mathbf{R},$$
$$t_1 < t_2 < ... < t_k \text{ si } x(t_1) = \mu^1 \text{ si ... si } x(t_k) = \mu^k,$$

şi respectiv

$$\forall u \in U, \exists (\mu^k)_{k \geq 1} \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists (t_k)_{k \geq 1} \in Seq, \forall k \geq 1, x(t_k) = \mu^k. \tag{8.4}$$

Valorile accesibile ale stărilor nu trebuie să fie distincte în aceste formule şi în (8.4) există chiar posibilitatea $\mu^1 = \mu^2 = ...$ *însemnând un comportament ciclic al sistemului*

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \Omega_u, \forall x \in f(u), \exists (t_k)_{k\geq 1} \in Seq \text{ si } \forall k \geq 1, x(t_k) = \mu. \tag{8.5}$$

De fapt, acest caz particular e observat şi dacă privim la (8.1) şi remarcăm că acolo putem avea

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \Omega_u, \forall x \in f(u), T_{\mu,x} \text{ e nemărginit superior,}$$

i.e. μ *e o valoare accesibilă ciclică.*

Câteva cazuri particulare ne-excluzive ale lui (8.5) sunt acelea când
- $\mu = x(-\infty + 0)$, *sistemul revine de un număr infinit de ori în starea iniţială,*
- $\forall k \geq 1$, $t_{k+1} = t_k + \delta$, *unde* $\delta > 0$ *e un parametru (pseudo-periodicitate),*
- $\mu = x(\infty - 0)$, μ *e starea finală.*

Avem următoarele variante mai tari ale lui (8.4):

$$\forall u \in U, \exists (\mu^k)_{k\geq 1} \in \mathbf{B}^n, \exists (t_k)_{k\geq 1} \in Seq, \forall x \in f(u), \forall k \geq 1, x(t_k) = \mu^k; \tag{8.6}$$

$$\exists (t_k)_{k\geq 1} \in Seq, \forall u \in U, \exists (\mu^k)_{k\geq 1} \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \forall k \geq 1, x(t_k) = \mu^k. \tag{8.7}$$

Legăm proprietăţile (8.4), (8.6), (8.7) de acelea de existenţă a stării iniţiale din Teorema 25 cazurile d), e), f), pe care le reproducem sub forma:

$$\forall u \in U, \exists \mu^0 \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0, x(t) = \mu^0, \tag{8.8}$$

$$\forall u \in U, \exists \mu^0 \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu^0, \tag{8.9}$$

$$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \exists \mu^0 \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu^0. \tag{8.10}$$

Cu alte cuvinte, f *are stări iniţiale fără curse iar timpul iniţial e nemărginit, mărginit şi respectiv fix. Prin punerea împreună a lui (8.4) cu (8.8), a lui (8.6) cu (8.9), a lui (8.7) cu (8.10) se obţin următoarele proprietăţi*

$$\forall u \in U, \exists (\mu^k) \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \tag{8.11}$$

$$\exists (t_k) \in Seq, x(-\infty + 0) = \mu^0 \text{ si } \forall k \in \mathbf{N}, x(t_k) = \mu^k,$$

$$\forall u \in U, \exists (\mu^k) \in \mathbf{B}^n, \exists (t_k) \in Seq, \tag{8.12}$$

$$\forall x \in f(u), x(-\infty + 0) = \mu^0 \text{ si } \forall k \in \mathbf{N}, x(t_k) = \mu^k,$$

$$\exists (t_k) \in Seq, \forall u \in U, \tag{8.13}$$

$$\exists (\mu^k) \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), x(-\infty + 0) = \mu^0 \text{ si } \forall k \in \mathbf{N}, x(t_k) = \mu^k.$$

Aici (8.11),...,(8.13) reprezintă ideea de predictibilitate a comportării lui f *pe care dorim să o subliniem în această secţiune. În (8.11), predictibilitatea e spaţială doar: pentru orice* $u \in U$, *se ştie că* $\mu^0, \mu^1, ...$ *sunt valori care vor fi luate cândva de toate stările lui* f, *în această ordine. (8.12) e o situaţie intermediară care a apărut deja (sub forma (8.2), de exemplu), când am utilizat terminologia de acces(e) sincron(e). (8.13) e acea situaţie când predictibilitatea e mai complexă, temporală şi spaţială: se cunosc momentele de timp descret* $t_0, t_1, ...$ *când pentru orice* u, *orice stare a lui* f *va lua valorile* $\mu^0, \mu^1, ...$ *depinzând de* $u \in U$.

Se vede că o nouă nuanţă de predictibilitate a comportamentului lui f se obţine prin inversiunea în proprietăţile precedente a lui u şi μ. De exemplu putem înlocui (8.1) prin

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu$$

şi (8.11) respectiv prin

$$\exists (\mu^k) \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u),$$

$$\exists (t_k) \in Seq, x(-\infty + 0) = \mu^0 \text{ si } \forall k \in \mathbf{N}, x(t_k) = \mu^k$$

Aceste două condiţii exprimă cerinţa ca sistemul, indiferent de alegerea intrării, accesează cu stările sale anumite puncte. De exemplu prima proprietate poate însemna existenţa unei (unice) stări iniţiale (finale).

DEFINITIE 79. *Un sistem f care satisface (8.12) se numeşte **slab sincron** în timp ce dacă (8.13) e adevărată, atunci f se spune că e **tare sincron**.*

TEOREMĂ 204. *Dacă sistemul $g : V \to P^*(S^{(n)}), V \subset S^{(m)}$ e slab (tare) sincron atunci orice subsistem $f \subset g$ are aceeaşi proprietate.*

TEOREMĂ 205. *Dacă $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ e slab (tare) sincron, atunci f^* are aceeaşi proprietate.*

DEMONSTRAŢIE. De exemplu, (8.12) implică

$$\forall u \in U^*, \exists (\mu^k) \in \mathbf{B}^n, \exists (t_k) \in Seq, \forall x \in f(\overline{u}),$$

$$\overline{x(-\infty + 0)} = \overline{\mu^0} \text{ si } \forall k \in \mathbf{N}, \overline{x(t_k)} = \overline{\mu^k}$$

de unde avem că f^* e slab sincron. □

TEOREMĂ 206. *Fie mulţimea nevidă $X \subset S^{(n)}$ pe care o identificăm cu sistemul autonom $f = X$. Sistemul f e slab sincron dacă şi numai dacă f e tare sincron dacă şi numai dacă*

$$\exists (\mu^k) \in \mathbf{B}^n, \exists (t_k) \in Seq, \forall x \in X,$$

$$x(-\infty + 0) = \mu^0 \text{ si } \forall k \in \mathbf{N}, x(t_k) = \mu^k.$$

TEOREMĂ 207. *Dacă f e neanticipativ: $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U$,*

$$u_{(-\infty,t)} = v_{(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\}$$

şi tare sincron, să fixăm o familie $(t_k) \in Seq$ care face (8.13) adevărată. Atunci pentru toţi $k \in \mathbf{N}$, valorile μ^k depind doar de $u_{(-\infty,t_k)}$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $k \in \mathbf{N}$, $t_k \in \mathbf{R}$ şi $u, v \in U$ aşa încât $\forall x \in f(u), x(t_k) = \mu^k$, $\forall y \in f(v), y(t_k) = \mu'^k$, altfel arbitrare. Dacă $u_{|(-\infty,t_k)} = v_{|(-\infty,t_k)}$, din neanticipativitatea lui f avem că $\{x_{|(-\infty,t_k]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t_k]} | y \in f(v)\}$. În particular $\mu^k = \mu'^k$, unde k e arbitrar, deci proprietatea e adevărată pentru orice k. □

TEOREMĂ 208. *Dacă f e tare sincron şi invariant în timp, atunci $\forall u \in U, \forall x \in f(u), x$ e funcţia constantă.*

DEMONSTRAŢIE. Faptul că f e tare sincron implică aceea că are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial fix. Aplicăm Teorema 162. □

OBSERVATIE 72. *Dacă ţinem cont de (8.7) şi de existenţa stării iniţiale din Teorema 25 cazul i) (în loc de f)) i.e. f are stare iniţială constantă cu timp iniţial fix, reproduse sub forma*

$$\exists \mu^0 \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \forall t < t_0, x(t) = \mu^0,$$

obţinem

$$\exists (t_k) \in Seq, \exists \mu^0 \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \tag{8.14}$$

$$\exists (\mu^k)_{k \geq 1} \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), x(-\infty + 0) = \mu^0 \; si \; \forall k \in \mathbf{N}, x(t_k) = \mu^k$$

(în loc de (8.13)). Singura diferenţă dintre (8.13) şi (8.14) e aceea că în ultima starea iniţială μ^0 nu depinde de intrarea u.

DEFINITIE 80. *Un sistem f care îndeplineşte proprietatea (8.14) se numeşte* ***tare sincron iniţializat****.*

CAPITOLUL 7

Surjectivitate, controlabilitate şi accesibilitate

Controlabilitatea şi accesibilitatea sunt concepte fundamentale în teoria sistemelor. Dorinţa de a le studia ne duce în scurt timp la concluzia că ele nu reprezintă un punct de vedere comun al cercetătorilor. Prezentarea noastră e făcută ca o continuare a discuţiilor pe seama surjectivităţii sistemelor. Includem o comparaţie a conceptelor noastre de controlabilitate şi accesibilitate cu altele existente în literatură.

1. Surjectivitate, observaţie

OBSERVATIE 73. *Există tentaţia de a considera surjectivitatea lui* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ *ca fiind definită de*

$$\forall X \in P^*(S^{(n)}), \exists u \in U, f(u) = X$$

şi apoi de a lega acest concept de primul concept de injectivitate din Definiţia 67

$$\forall u \in U, \forall v \in U, u \neq v \Longrightarrow f(u) \neq f(v).$$

Din aceste două definiţii ar trebui să rezulte bijecţiile $U \to P^*(S^{(n)})$. *Problema e că avem motive bune să credem că astfel de bijecţii nu există şi, deoarece nu cunoaştem exemple ale precedentei proprietăţi de surjectivitate, să o evităm.*

2. Surjectivitate, prima definiţie

DEFINITIE 81. *Sistemul* f *este* ***surjectiv*** *dacă e îndeplinită una din următoarele proprietăţi echivalente:*

a) $\forall x \in S^{(n)}, \exists u \in U, x \in f(u)$,

b) $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) = S^{(n)}$.

OBSERVATIE 74. *Definiţia surjectivităţii pleacă de la ideea de a ne referi la stări, nu la mulţimi de stări. Aceasta se datorează faptului că raportarea la mulţimi de stări a părut să blocheze raţionamentele. Se afirmă că pentru un sistem surjectiv orice stare e posibilă, printr-o alegere corespunzătoare a intrării.*

Se vede că dacă sistemul f *e determinist, atunci această definiţie a surjectivităţii coincide cu cea uzuală.*

EXEMPLU 82. *Sistemul* $f : S \to P^*(S)$,

$$\forall u \in S, f(u) = \{u, \overline{u}\}$$

e surjectiv şi de asemenea auto-dual.

EXEMPLU 83. *Considerăm sistemul* $f : S^{(m)} \to P^*(S^{(m)})$ *definit de*

$$\forall u \in S^{(m)}, f(u) = \{u_\sigma | \sigma \in S(\{1, ..., m\})\}.$$

El e în mod evident surjectiv şi simetric.

EXEMPLU 84. *Sistemul* $f : S^{(m)} \to P^*(S^{(m)})$,

$$\forall u \in S^{(m)}, f(u) = \{u \circ \tau^d | d \in \mathbf{R}\}$$

e surjectiv şi invariant în timp.

TEOREMĂ 209. *Dacă* f *e un sistem surjectiv, atunci funcţia sa stare iniţială* ϕ_0 *satisface*

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \mu \in \phi_0(u).$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru $\forall \mu \in \mathbf{B}^n$, luăm un $x \in S^{(n)}$ cu $x(-\infty + 0) = \mu$ şi există $u \in U$ aşa încât $x \in f(u)$ şi $x(-\infty + 0) \in \phi_0(u)$. □

TEOREMĂ 210. *Presupunem că* f *e surjectiv şi* $f \subset \dot{g}$, *unde* $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $V \in P^*(S^{(m)})$ *e un sistem oarecare. Atunci* g *e surjectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru $\forall x \in S^{(n)}$, există un $u \in U$ aşa încât $x \in f(u)$. Deoarece $u \in V$ şi $x \in g(u)$, avem afirmaţia teoremei. □

TEOREMĂ 211. *Surjectivitatea lui* f *implică surjectivitatea lui* f^*.

TEOREMĂ 212. *Produsul cartezian al sistemelor surjective* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ *şi* $f' : U' \to P^*(S^{(n')})$, $U' \in P^*(S^{(m')})$ *e surjectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $z \in S^{(n+n')}$ arbitrar şi notăm cu x primele sale n coordonate şi cu x' ultimele sale n' coordonate. Există un $u \in U$ aşa încât $x \in f(u)$ şi există de asemenea un $u' \in U'$ aşa încât $x' \in f'(u')$. Cu alte cuvinte $z \in (f \times f')(u \times u')$. □

TEOREMĂ 213. *Se dau sistemele* $f : U \to P^*(S^{(n)})$, $U \in P^*(S^{(m)})$ *şi* $h : X \to P^*(S^{(p)})$, $X \in P^*(S^{(n)})$ *aşa încât să fie adevărată incluziunea* $\bigcup_{u \in U} f(u) \subset X$. *Dacă* $h \circ f$ *e surjectiv, atunci* h *e surjectiv de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Avem

$$\forall z \in S^{(p)}, \exists u \in U, z \in (h \circ f)(u),$$
$$\forall z \in S^{(p)}, \exists u \in U, \exists x \in f(u), z \in h(x),$$
$$\forall z \in S^{(p)}, \exists x \in X, z \in h(x).$$

□

TEOREMĂ 214. *Considerăm sistemele* f, h *cu proprietatea că* h *e surjectiv şi* $\bigcup_{u \in U} f(u) = X$. *Atunci* $h \circ f$ *e surjectiv. În particular legarea în serie a sistemelor surjective e un sistem surjectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $z \in S^{(p)}$ ales în mod arbitrar. Faptul că există $x \in X$ cu $z \in h(x)$ e adevărat din surjectivitatea lui h. Există atunci $u \in U$ aşa încât $x \in f(u)$, deci $z \in (h \circ f)(u)$. În particular, dacă f e surjectiv, atunci are loc $\bigcup_{u \in U} f(u) = X = S^{(n)}$. □

TEOREMĂ 215. *Reuniunea unui sistem surjectiv cu un sistem arbitrar e un sistem surjectiv. În particular, reuniunea sistemelor surjective e un sistem surjectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice sisteme f, g avem $f \subset f \cup g$. Dacă f e surjectiv atunci, datorită Teoremei 210, $f \cup g$ e surjectiv. □

TEOREMĂ 216. *Un sistem autonom $f = X$ e surjectiv dacă şi numai dacă $X = S^{(n)}$.*

TEOREMĂ 217. *Fie $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ o funcţie Booleană surjectivă. Atunci sistemul combinaţional ideal F_d e surjectiv pentru orice $d \in \mathbf{R}$.*

DEMONSTRAŢIE. Luăm $d \in \mathbf{R}$ şi $x \in S^{(n)}$ arbitrare, fixate. Fie $(t_k) \in Seq$ un şir compatibil cu x

$$x(t) = x(t_0 - 0) \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus x(t_0) \cdot \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus x(t_1) \cdot \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus ...$$

Se aleg numerele $\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, ... \in \mathbf{B}^m$ astfel încât

$$F(\lambda_{-1}) = x(t_0 - 0),$$
$$\forall k \in \mathbf{N}, F(\lambda_k) = x(t_k),$$

existenţa lor fiind asigurată de surjectivitatea lui F. Obţinem că funcţia

$$u(t) = \lambda_{-1} \cdot \chi_{(-\infty,t_0-d)}(t) \oplus \lambda_0 \cdot \chi_{[t_0-d,t_1-d)}(t) \oplus \lambda_1 \cdot \chi_{[t_1-d,t_2-d)}(t) \oplus ...$$

satisface

$$F_d(u)(t) = F(u(t-d)) =$$
$$= F(\lambda_{-1} \cdot \chi_{(-\infty,t_0-d)}(t-d) \oplus \lambda_0 \cdot \chi_{[t_0-d,t_1-d)}(t-d) \oplus \lambda_1 \cdot \chi_{[t_1-d,t_2-d)}(t-d) \oplus ...) =$$
$$= F(\lambda_{-1} \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \lambda_0 \cdot \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus \lambda_1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus ...) =$$
$$= F(\lambda_{-1}) \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus F(\lambda_0) \cdot \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus F(\lambda_1) \cdot \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus ... =$$
$$= x(t_0 - 0) \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus x(t_0) \cdot \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus x(t_1) \cdot \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus ... = x(t).$$

□

3. Surjectivitatea posibilă şi surjectivitatea necesară

OBSERVATIE 75. *Fie sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)})$, unde $U \subset S^{(m)}$ e nevidă. Formulăm următoarele proprietăţi:*

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu; \tag{3.1}$$

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu; \tag{3.2}$$

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x(t) = \mu; \tag{3.3}$$

$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), x(t) = \mu. \tag{3.4}$$

Implicaţiile sunt

$$(3.4) \Longrightarrow (3.3) \Longrightarrow (3.2) \Longrightarrow (3.1).$$

Interpretarea lui (3.1),...,(3.4) e simplă: după ce am legat surjectivitatea de mulţimile $X \in P^*(S^{(n)})$ şi de stările $x \in S^{(n)}$, o legăm de valorile $\mu \in \mathbf{B}^n$. Prima proprietate afirmă că toate valorile $\mu \in \mathbf{B}^n$ sunt posibile pentru stările lui f, în timp ce ultimele trei proprietăţi afirmă că toate valorile $\mu \in \mathbf{B}^n$ sunt necesare pentru stările lui f. (3.2) şi (3.3) arată că toate valorile $\mu \in \mathbf{B}^n$ sunt accesibile, $\Omega = \mathbf{B}^n$ respectiv sincron accesibile, $\Omega_s = \mathbf{B}^n$.

Remarcăm că orice sistem f care satisface proprietatea de surjectivitate din Definiţia 81, satisface de asemenea următoarea versiune tare a lui (3.1):

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists x \in f(u), \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu.$$

DEFINITIE 82. *Sistemul f e* ***posibil surjectiv*** *dacă satisface (3.1).*

DEFINITIE 83. *Sistemul f se numeşte* ***necesar surjectiv*** *dacă satisface oricare dintre* (3.2),...,(3.4). *Dacă* (3.2) *e adevărată, atunci f e* ***necesar surjectiv cu timp de acces nemărginit****. Dacă* (3.3) *e adevărată, atunci f e* ***necesar surjectiv cu timp de acces mărginit****. În cazul în care* (3.4) *e îndeplinită, sistemul f e* ***necesar surjectiv cu timp de acces fix****. În aceste trei situaţii timpul de acces t e numit* ***nemărginit, mărginit*** *şi* ***fix****.*

EXEMPLU 85. *Sistemul autonom $f : S \to S$,*

$$\forall u \in S, f(u) = S$$

e posibil surjectiv, dar nu necesar surjectiv.

EXEMPLU 86. *Notăm $U = \{\chi_{(-\infty,0)}, \chi_{[0,\infty)}\}$ şi fie $f : U \to P^*(S)$ definit prin*

$$\forall u \in U, f(u) = \{u \circ \tau^d | d \in \mathbf{R}\}.$$

Sistemul f e necesar surjectiv cu timp de acces nemărginit, fără să aibe timpul de acces mărginit. Verificăm proprietatea (3.2), *de exemplu, pentru $\mu = 0 : \exists u \in U$, adică $u = \chi_{(-\infty,0)}$ aşa încât $f(u) = \{\chi_{(-\infty,d)} | d \in \mathbf{R}\}$ şi $\forall x \in f(u)$, există $t \in \mathbf{R}$, i.e. $t \geq \sup$ supp x cu proprietatea $x(t) = 0$.*

EXEMPLU 87. *$U = \{0, 1\}$ (cele două funcţii constante $\mathbf{R} \to \mathbf{B}$) şi $f : U \to P^*(S)$ e definit de*

$$f(0) = \{x | x \in S, x(0) = 0\},$$
$$f(1) = \{x | x \in S, x(2) = 1\}.$$

Sistemul f e necesar surjectiv cu timp de acces mărginit, dar nu şi cu timp de acces fix. Ca să verificăm că (3.3) *e îndeplinită, alegem pentru orice $\mu \in \mathbf{B}$, intrarea $u = \mu$ (egalitatea dintre funcţia constantă şi constantă) şi*

$$t = \begin{cases} 0, dacă\ \mu = 0 \\ 2, dacă\ \mu = 1 \end{cases}.$$

EXEMPLU 88. *Definim $f : S \to P^*(S)$ prin*

$$\forall u \in S, f(u) = \{x | x \in S, x(0) = u(0)\}.$$

Sistemul f e necesar surjectiv cu timp de acces fix, ceea ce înseamnă că pentru $t = 0$ şi pentru orice $\mu \in \mathbf{B}$ putem alege un $u \in S$ aşa încât $u(0) = \mu$. Atunci $\forall x \in f(u), x(0) = \mu$. Proprietatea (3.4) *e adevărată.*

TEOREMĂ 218. *Dacă f e sistem determinist, atunci proprietăţile de surjectivitate posibilă şi surjectivitate necesară cu timp de acces nemărginit sunt echivalente.*

TEOREMĂ 219. *Presupunem că f e posibil surjectiv şi că $f \subset g$, pentru un sistem $g : V \to P^*(S^{(n)})$, $V \in P^*(S^{(m)})$. Atunci g e posibil surjectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Deducem că dacă $\mu \in \mathbf{B}^n$ e oarecare, atunci există $u \in U$, deci există $u \in V$ şi $x \in f(u)$, cu alte cuvinte există $x \in g(u)$ şi $t \in \mathbf{R}$ astfel încât $x(t) = \mu$. □

TEOREMĂ 220. *Presupunem că sistemul g e necesar surjectiv cu timp de acces nemărginit (mărginit, fix). Atunci din $f \subset g$ şi $U = V$, deducem că f e necesar surjectiv cu timp de acces nemărginit (mărginit, fix).*

DEMONSTRAŢIE. Proprietăţile tuturor stărilor lui g sunt, în particular, proprietăţile tuturor stărilor lui f. □

TEOREMĂ 221. *Dacă sistemul f e posibil surjectiv (necesar surjectiv cu timp de acces nemărginit, mărginit, fix) atunci f^* are aceeaşi proprietate de surjectivitate.*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm implicaţia pentru afirmaţia (3.2) :

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu \Longleftrightarrow$$
$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U^*, \forall x \in f(\overline{u}), \exists t \in \mathbf{R}, \overline{x}(t) = \overline{\mu} \Longleftrightarrow$$
$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U^*, \forall x \in f^*(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu.$$

□

TEOREMĂ 222. *Considerăm sistemele $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ şi $h : X \to P^*(S^{(p)}), X \in P^*(S^{(n)})$ cu proprietatea că are loc incluziunea $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$. Dacă $h \circ f$ e posibil surjectiv (necesar surjectiv cu timp de acces nemărginit, mărginit, fix), atunci h e posibil surjectiv (necesar surjectiv cu timp de acces nemărginit, mărginit, fix).*

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem că $h \circ f$ e posibil surjectiv. Atunci

$$\forall \nu \in \mathbf{B}^p, \exists u \in U, \exists z \in (h \circ f)(u), \exists t \in \mathbf{R}, z(t) = \nu,$$

aşadar

$$\forall \nu \in \mathbf{B}^p, \exists u \in U, \exists x \in f(u), \exists z \in h(x), \exists t \in \mathbf{R}, z(t) = \nu,$$
$$\forall \nu \in \mathbf{B}^p, \exists x \in X, \exists z \in h(x), \exists t \in \mathbf{R}, z(t) = \nu$$

şi h e posibil surjectiv.

Presupunem în acest moment că $h \circ f$ e necesar surjectiv cu timp de acces mărginit. Avem

$$\forall \nu \in \mathbf{B}^p, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall z \in (h \circ f)(u), z(t) = \nu,$$
$$\forall \nu \in \mathbf{B}^p, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), \forall z \in h(x), z(t) = \nu,$$
$$\forall \nu \in \mathbf{B}^p, \exists t \in \mathbf{R}, \exists x \in X, \forall z \in h(x), z(t) = \nu$$

i.e. h e necesar surjectiv cu timp de acces mărginit. □

TEOREMĂ 223. *Dacă f satisface $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) = X$ şi h e posibil surjectiv, atunci sistemul $h \circ f$ e posibil surjectiv. În particular, dacă f satisface proprietatea de surjectivitate din Definiţia 81 şi h e posibil surjectiv, atunci $h \circ f$ e posibil surjectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Avem

$$\forall \nu \in \mathbf{B}^p, \exists x \in X, \exists z \in h(x), \exists t \in \mathbf{R}, z(t) = \nu,$$
$$\forall \nu \in \mathbf{B}^p, \exists u \in U, \exists x \in f(u), \exists z \in h(x), \exists t \in \mathbf{R}, z(t) = \nu,$$
$$\forall \nu \in \mathbf{B}^p, \exists u \in U, \exists z \in (h \circ f)(u), \exists t \in \mathbf{R}, z(t) = \nu.$$

Proprietatea din Definiţia 81 implică $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) = X = S^{(n)}$. □

TEOREMĂ 224. *Fie f un sistem necesar surjectiv cu timp de acces nemărginit (mărginit, fix) şi presupunem că g e un sistem oarecare cu $U \subset V$ şi $\forall u \in U, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$. Atunci intersecţia $f \cap g$ e un sistem necesar surjectiv cu timp de acces nemărginit (mărginit, fix).*

DEMONSTRAŢIE. Suportul lui $f \cap g$ e U. Aplicăm Teorema 220. □

TEOREMĂ 225. *Dacă sistemul f e posibil surjectiv şi dacă g e un sistem arbitrar, atunci $f \cup g$ e posibil surjectiv. În particular, reuniunea sistemelor posibil surjective e un sistem posibil surjectiv.*

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $f \subset f \cup g$, afirmaţia teoremei decurge din Teorema 219. □

4. Controlabilitate şi accesibilitate, puncte de vedere

OBSERVATIE 76. *Noţiunea de controlabilitate* [**20**] *a ecuaţiilor diferenţiale liniare a fost introdusă într-o formă implicită în lucrările de sisteme optimale ale lui L.S. Pontriagin şi ale colegilor săi sub forma unor condiţii algebrice. Noţiunea a devenit distinctă datorită lucrărilor pe care R.E. Kalman le-a prezentat la Conferinţa de ecuaţii diferenţiale din Mexico City din 1959 precum şi la primul Congres de control automat din Moscova care s-a desfăşurat în anul 1960.*

Reproducem în acest moment câteva puncte de vedere asupra controlabilităţii şi accesibilităţii. Menţionăm că autorii pe care îi vom aduce în discuţie lucrează cu sisteme reale, deterministe şi că ideile lor sunt prezentate sub o formă adaptată prezentului context.

Profesorul Toma Leonida Dragomir afirmă[1]*: 'controlabilitatea înseamnă existenţa unei comenzi care poate conduce sistemul într-un interval de timp finit arbitrar de lung*[2] *dintr-o stare arbitrară în stare de repaus*[3]*. Accesibilitate înseamnă existenţa unei comenzi care să poată conduce un sistem din starea de repaus într-o stare arbitrară, deci accesul din starea de repaus la o stare arbitrară tot într-un interval de timp finit arbitrar de lung. Pentru majoritatea sistemelor liniare cele două proprietăţi sunt echivalente. Exista şi sisteme liniare pentru care ele nu sunt echivalente, iar în cazul sistemelor neliniare problema este mai acută. Istoric, prima dată a apărut termenul de controlabilitate, apoi cel de accesibilitate. Datorită echivalenţei în cazuri uzuale liniare ele sunt în mod frecvent confundate.'*

Opinia despre controlabilitate a lui Anouck Girard[4] *e aceea că 'poţi ajunge oriunde doreşti într-un timp finit'. În această concepţie orice referire de acces la o poziţie de repaus (steady state) lipseşte.*

F.H. Clarke et al.[5] *definesc controlabilitatea asimptotică într-o manieră compatibilă, excepţie cerinţa comportării asimptotice, cu Dragomir şi observă că definiţia lor e o 'generalizare naturală la sisteme cu control a conceptului de stabilitate uniformă asimptotică a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale'.*

În a sa 'Kalman's Controllability Rank Condition: from Linear to Nonlinear'[6]*, Eduardo D. Sontag identifică controlabilitatea şi accesibilitatea lui Dragomir afirmând că 'În principiu, dorim să studiem controlabilitatea din origine'. Autorul consideră că originea e o stare de repaus sau, în termenologia sa, o 'stare de echilibru' şi menţionează existenţa unei alte terminologii pentru acest concept de controlabilitate, anume aceea de 'reachability'. Mai departe, 'Pentru probleme de*

[1] corespondenţă privată

[2] aceasta înseamnă că nu ne referim la un comportament asimptotic aici

[3] i.e. valoarea finală a stării, care în cazul liniar coincide cu vectorul nul

[4] ME237-Control of Nonlinear Dynamic Systems, Discussion #3, Controllability and Observability of Nonlinear Systems, February 18-th, 2002

[5] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, E.D. Sontag, A.I. Subbotin, Asymptotic Controllability Implies Feedback Stabilization, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. XX, No. Y, 1999

[6] care va apărea în cartea Mathematical System Theory: The influence of R. E. Kalman

controlabilitate din puncte care nu sunt de repaus au loc rezultate similare, diferenţa constând in modificări minore ale definiţiilor', i.e. el acceptă controlabilitatea în sensul lui Girard, un simplu transfer fără echilibru iniţial ori final. O altă remarcă a sa e că 'deseori suntem interesaţi ... de controlabilitate la zero'. După ce actualizăm contextul analizat de Sontag astfel încât el să corespundă necesităţilor noastre, accesibilitatea sa coincide cu ceea ce el numeşte 'controlabilitate din origine'.

Prezentăm acum definiţiile date de profesorul Mihail Megan [**20**] *celor două concepte, traduse în limbajul sistemelor asincrone. Să observăm că în aceste definiţii autorul ştie şi foloseşte posibilitatea de a include sau de a nu include cerinţa de repaus. De menţionat de asemenea că, uneori există posibilitatea a mai multe traduceri neechivalente ale definiţiilor sale în limbajul sistemelor asincrone. Fie* $t' \in \mathbf{R}$. *Sistemul* f *e:*

a) ***exact*** t' ***controlabil*** *dacă pentru orice* $\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n$, *avem că există* $t'' \geq t'$ *şi* $u \in U$ *aşa încât (toate) stările* $x \in f(u)$ *iau valorile* μ', μ'' *la momentele de timp* t', t'';

b) ***exact*** t' ***stabil controlabil*** *(în original:* ***exact*** t' ***nul controlabil****) dacă pentru orice* $\mu' \in \mathbf{B}^n$, *există o stare de repaus* $\mu'' \in \mathbf{B}^n$[7] *precum şi* $t'' \geq t'$ *şi* $u \in U$ *aşa încât (toate) stările* $x \in f(u)$ *iau valorile* μ', μ'' *la momentele de timp* t' *şi* t'';

c) ***exact*** t' ***controlabil cu timp universal*** *dacă la a)* t'' *depinde doar de* t' *şi e independent de oricare dintre* μ', μ'', u *şi* x;

d) ***exact*** t' ***stabil controlabil cu timp universal*** *(în original:* ***exact*** t' ***nul controlabil cu timp universal****) dacă la b)* t'' *depinde doar de* t' *şi e independent de toate celelalte variabile.*

Cu astfel de definiţii Megan acceptă de fapt toate celelalte puncte de vedere. Cuvântul 'exact' în această terminologie e opus lui 'aproximativ', o variantă pe care autorul o ia de asemenea in considerare. Nu insistăm în acestă direcţie deoarece 'exact' şi 'aproximativ' coincid în studiul nostru. În continuare, f *e:*

e) ***exact complet controlabil*** *dacă a) e adevărată pentru orice* t';

f) ***exact complet stabil controlabil*** *(în original:* ***exact complet nul controlabil****) dacă b) e adevărat pentru orice* t';

g) ***uniform exact controlabil*** *dacă la e)* $t'' = t' + \delta$, $\delta > 0$ *e o constantă;*

h) ***uniform exact stabil controlabil*** *(în original:* ***uniform exact nul controlabil****) dacă la f)* $t'' = t' + \delta$, $\delta > 0$ *e o constantă.*

Dăm acum din lucrarea profesorului Megan [**20**] *definiţiile accesibilităţii aşa cum se obţin ele în urma traducerii făcute pentru contextul teoriei sistemelor asincrone. Fie* $t' \in \mathbf{R}$. *Sistemul* f *este:*

a') ***exact*** t' ***accesibil*** *dacă* $\forall \mu'' \in \mathbf{B}^n$, *există starea de repaus* $\mu' \in \mathbf{B}^n$[8], *momentul de timp* $t'' \geq t'$ *şi intrarea* $u \in U$ *aşa încât valorile* μ', μ'' *sunt accesate de (toate) stările* $x \in f(u)$ *la* t' *şi respectiv la* t'';

b') ***exact*** t' ***accesibil cu timp universal*** *dacă la a')* t'' *depinde doar de* t' *şi e independent de rest;*

c') ***exact complet accesibil*** *dacă a') e adevărată pentru toţi* t';

d') ***uniform exact accesibil*** *dacă la c') există* $\delta > 0$ *aşa încât* $t'' = t' + \delta$.

---

[7]'steady state'; aici nu e evident dacă traducerea e $\exists \mu" \in \mathbf{B}^n$, $\mu"$ e stare de repaus sau $\forall \mu" \in \mathbf{B}^n$, $\mu"$ e stare de repaus

[8]ca mai înainte, avem două traduceri convenabile: $\exists \mu' \in \mathbf{B}^n$, μ' stare de repaus şi $\forall \mu' \in \mathbf{B}^n$, μ' stare de repaus

În următoarele secţiuni vom folosi cuvântul 'accesibilitate' atât pentru controlabilitate, cât şi pentru accesibilitate.

5. Accesibilitate în sensul de a avea acces

DEFINITIE 84. *Fie sistemul f şi numărul $\delta > 0$. Considerăm următoarele afirmaţii*

$$\forall\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu, \tag{5.1}$$

$$\forall\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x_{|(-\infty,t)} = \mu, \tag{5.2}$$

$$\forall\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x_{|[t,\infty)} = \mu, \tag{5.3}$$

$$\forall\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \forall t_0 \in \mathbf{R}, \exists t > t_0, x(t) = \mu, \tag{5.4}$$

$$\forall\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x_{|[t,t+\delta]} = \mu, \tag{5.5}$$

$$\forall\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x(t) = \mu, \tag{5.6}$$

$$\forall\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t)} = \mu, \tag{5.7}$$

$$\forall\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|[t,\infty)} = \mu, \tag{5.8}$$

$$\forall\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall t_0 \in \mathbf{R}, \exists t > t_0, \forall x \in f(u), x(t) = \mu, \tag{5.9}$$

$$\forall\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|[t,t+\delta]} = \mu. \tag{5.10}$$

a) (5.1) se numeşte proprietatea de ***accesibilitate***. *Dacă $\Omega = \mathbf{B}^n$ sau, în mod echivalent, dacă (5.1) e adevărată, spunem că f e* ***accesibil***.

b) (5.2) se numeşte proprietatea de ***accesibilitate la valorile iniţiale ale stărilor***. *Dacă $\Theta_0' = \mathbf{B}^n$ sau, echivalent, dacă (5.2) e îndeplinită, spunem că f e* ***accesibil în sensul accesului la valorile iniţiale ale stărilor***.

...

c) (5.10) e proprietatea de ***accesibilitate sincronă la valorile $\delta-$persistente ale stărilor***. *Dacă $\Omega_{\delta s} = \mathbf{B}^n$ sau, echivalent, dacă (5.10) e satisfăcută, atunci spunem că f e* ***accesibil în sensul accesului sincron la valorile $\delta-$persistente ale stărilor***.

OBSERVATIE 77. *Afirmaţiile (5.1),...,(5.10) sunt similare cu (1.1),...,(1.10) din Capitolul 6 unde $\exists\mu$ a fost înlocuit cu $\forall\mu$, i.e. în locul existenţei accesului la o valoare μ, avem accesul la orice valoare μ. Implicaţiile dintre proprietăţile precedente sunt aceleaşi ca şi cele din Observaţia 60 i.e.*

$$\begin{array}{ccccc}
(5.6) & \Longleftarrow & (5.10) & \Longleftarrow & (5.7) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
(5.1) & \Longleftarrow & (5.5) & \Longleftarrow & (5.2) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
(5.4) & \Longleftarrow & (5.3) & & \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
(5.9) & \Longleftarrow & (5.8) & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
(5.6) & & (5.10) & &
\end{array}$$

(5.1) şi (5.6) coincid cu cerinţele de surjectivitate necesară (3.2), (3.3).

(5.6),...,(5.10) pot fi întărite la proprietăţi de 'timp fix', ceea ce dă noi sensuri conceptului de accesibilitate.

(5.1),...,(5.10) sunt interpretate ca o generalizare a punctului de vedere a lui Dragomir conform căruia 'controlabilitate înseamnă existenţa unei comenzi care poate conduce sistemul într-un interval de timp finit arbitrar de lung dintr-o stare arbitrară în stare de repaus' (vezi (5.3) şi de asemenea (1.3) din Capitolul 6) la toate tipurile de valori accesibile folosite: arbitrare, iniţiale, finale, ciclice şi $\delta-$persistente. Cele mai generale dintre aceste proprietăţi, (5.1) şi (5.6), sunt conforme şi cu cerinţa lui Girard 'poţi ajunge oriunde doreşti într-un interval finit de timp'.

6. Accesul sistemelor neanticipative dintr-o stare finală

TEOREMĂ 226. *Presupunem că sistemul f e neanticipativ în sensul Definiţiei 64: $\forall t\in\mathbf{R},\forall u\in U,\forall v\in U,$*

$$u_{|(-\infty,t)}=v_{|(-\infty,t)}\Longrightarrow\{x_{|(-\infty,t]}|x\in f(u)\}=\{y_{|(-\infty,t]}|y\in f(v)\}$$

şi fixăm $\mu',\mu''\in\mathbf{B}^n$, $u\in U$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\forall x\in f(u),\exists t'\in\mathbf{R},x(t')=\mu'$ si $\exists t''>t',x(t'')=\mu''$;

b) $\exists v\in U,\forall y\in f(v),\exists t'\in\mathbf{R},u_{|(-\infty,t')}=v_{|(-\infty,t')},y(t')=\mu'$ şi $\forall x\in f(u),\exists t''>t',x(t'')=\mu''$.

DEMONSTRAŢIE. *a)* $\Longrightarrow$ *b)* E suficient să luăm $u=v$.

b) $\Longrightarrow$ *a)* Fixăm un $v\in U$ care face b) adevărată şi notăm

$$t_1=\sup\{t'|t'\in\mathbf{R},u_{|(-\infty,t')}=v_{|(-\infty,t')}\}.$$

Dacă $t_1=\infty$, atunci $u=v$ şi a) e adevărată. Deci putem presupune din acest moment că $t_1<\infty$. Din aceea că $u_{|(-\infty,t_1)}=v_{|(-\infty,t_1)}$ şi din neanticipativitatea lui f, avem

$$\{x_{|(-\infty,t_1]}|x\in f(u)\}=\{y_{|(-\infty,t_1]}|y\in f(v)\}.\tag{6.1}$$

Pe de altă parte, ţinând cont de (6.1), b) implică

$$\forall y\in f(v),\exists t'\in\mathbf{R},u_{|(-\infty,t')}=v_{|(-\infty,t')},y(t')=\mu'\ si$$
$$si\ \forall x\in f(u),\exists t''>t',x(t'')=\mu'',$$
$$\forall y\in f(v),\exists t'\leq t_1,y(t')=\mu'\ si\ \forall x\in f(u),\exists t''>t',x(t'')=\mu'',$$
$$\forall x\in f(u),\exists t'\in\mathbf{R},x(t')=\mu'\ si\ \forall x\in f(u),\exists t''>t',x(t'')=\mu'',$$
$$\forall x\in f(u),\exists t'\in\mathbf{R},x(t')=\mu'\ si\ \exists t''>t',x(t'')=\mu''.$$

□

OBSERVATIE 78. *Accesul stărilor unui sistem la o valoare finală şi apoi din acea valoare finală la alte valori e importantă în teoria sistemelor asincrone. Apare o anumită trivialitate aici, în sensul că mulţimile (vezi Definiţia 69 şi de asemenea Definiţia 72)*

$$\Theta'_f\otimes\Omega=\{(\mu',\mu'')|\mu',\mu''\in\mathbf{B}^n,\exists u\in U,$$
$$\forall x\in f(u),\exists t'\in\mathbf{R},x_{|[t',\infty)}=\mu'\ si\ \exists t''>t',x(t'')=\mu''\},$$
$$\Theta'_f\otimes\Theta'_f=\{(\mu',\mu'')|\mu',\mu''\in\mathbf{B}^n,\exists u\in U,$$
$$\forall x\in f(u),\exists t'\in\mathbf{R},x_{|[t',\infty)}=\mu'\ si\ \exists t''\in\mathbf{R},x_{|[t'',\infty)}=\mu''\},$$
$$\Theta'_f\otimes R=\{(\mu',\mu'')|\mu',\mu''\in\mathbf{B}^n,\exists u\in U,$$

$$\forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x_{|[t',\infty)} = \mu' \; si \; \forall t_1 \in \mathbf{R}, \exists t'' > t_1, x(t'') = \mu''\},$$
$$\Theta'_f \otimes \Omega_\delta = \{(\mu', \mu'')|\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U,$$
$$\forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x_{|[t',\infty)} = \mu' \; si \; \exists t'' > t' - \delta, x_{|[t'',t''+\delta]} = \mu''\}$$

$\delta > 0$, *sunt toate egale (vezi Teorema 202 c)) cu*

$$\{(\mu, \mu)|\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \exists t \in \mathbf{R}, x_{|[t,\infty)} = \mu\}$$

în timp ce mulţimea

$$\Theta'_f \otimes \Theta'_0 = \{(\mu', \mu'')|\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U,$$
$$\forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x_{|[t',\infty)} = \mu' \; si \; \exists t'' > t', x_{|(-\infty,t'')} = \mu''\}$$

e egală (vezi Teorema 202 f)) cu

$$\{(\mu, \mu)|\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu\}.$$

Cu alte cuvinte, dintr-o valoare finală accesibilă, singura valoare accesibilă e valoarea finală insăşi, cu cazul particular când dintr-un punct accesibil de echilibru singura valoare accesibilă e punctul de echilibru însuşi.

Teorema precedentă ne permite să reconsiderăm accesele consecutive la μ' şi apoi la μ'' în cazul sistemelor neanticipative, i.e. ea dă ideea de a înlocui expresia de la a) cu aceea de la b), când μ' e valoarea finală şi μ'' e pe rând valoare arbitrară, valoare iniţială, valoare finală, valoare ciclică şi valoare $\delta-$persistentă. Avem

Definitie 85. *Considerăm sistemul f, neanticipativ în sensul Definiţiei 64. Numim*

$$\Theta'_f \circledast \Omega = \{(\mu', \mu'')|\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists v \in U, \forall y \in f(v), \exists t' \in \mathbf{R},$$
$$u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \; si \; \forall x \in f(u), \exists t'' > t', x(t'') = \mu''\}$$

***mulţimea perechilor** (μ', μ'') **de valori accesibile consecutive ale (stărilor) lui** f, **cu** μ' **finală**. Pentru $(\mu', \mu'') \in \Theta'_f \circledast \Omega$ spunem că există $u \in U$ aşa încât stările $x \in f(u)$ **iau (accesează) mai întâi valoarea finală** μ', **apoi valoarea** μ''.*

Să fixăm μ', μ'', u. Proprietatea

$$\exists v \in U, \forall y \in f(v), \exists t' \in \mathbf{R},$$
$$u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \; si \; \forall x \in f(u), \exists t'' > t', x(t'') = \mu''$$

*e numită **accesul consecutiv al (stărilor) lui** f, **aflat sub intrarea** u, **mai întâi la valoarea finală** μ', **apoi la** μ''. Spunem uneori că $f(u)$ **transferă valoarea finală** μ' **în** μ''.*

Terminologia şi notaţiile sunt similare pentru mulţimile

$$\Theta'_f \circledast \Theta'_0 = \{(\mu', \mu'')|\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists v \in U, \forall y \in f(v), \exists t' \in \mathbf{R},$$
$$u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \; si \; \forall x \in f(u), \exists t'' > t', x_{|(-\infty,t'')} = \mu''\},$$
$$\Theta'_f \circledast \Theta'_f = \{(\mu', \mu'')|\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists v \in U, \forall y \in f(v), \exists t' \in \mathbf{R},$$
$$u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \; si \; \forall x \in f(u), \exists t'' \in \mathbf{R}, x_{|[t'',\infty)} = \mu''\},$$
$$\Theta'_f \circledast R = \{(\mu', \mu'')|\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists v \in U, \forall y \in f(v), \exists t' \in \mathbf{R},$$
$$u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \; si \; \forall x \in f(u), \forall t_1 \in \mathbf{R}, \exists t'' > t_1, x(t'') = \mu''\},$$
$$\Theta'_f \circledast \Omega_\delta = \{(\mu', \mu'')|\mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists v \in U, \forall y \in f(v), \exists t' \in \mathbf{R},$$
$$u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \; si \; \forall x \in f(u), \exists t'' > t' - \delta, x_{|[t'',t''+\delta]} = \mu''\}$$

unde $\delta > 0$.

OBSERVATIE 79. *Există versiuni ale Definiţiei 85 în care una sau ambele accese sunt sincrone. Vom face uz de această observaţie mai târziu.*

În construcţiile precedente μ' nu e o valoare finală sub u, ci sub v, unde u şi v pot fi diferite. Cu alte cuvinte, dacă $u \neq v$, atunci există un moment al timpului t' cu proprietatea că $u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}$, $\{x_{|(-\infty,t']}|x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t']}|y \in f(v)\}$, $\forall y \in f(v), y_{|[t',\infty)} = \mu'$, $u(t') \neq v(t')$ şi există posibilitatea ca $\exists t'' > t', \exists x \in f(u), x(t'') \neq \mu'$. În particular, există posibilitatea ca $\forall x \in f(u), \exists t'' > t', x(t'') = \mu''$ cu $\mu'' \neq \mu'$. În aceste circumstanţe, $\Theta'_f \circledast \Omega, \Theta'_f \circledast \Theta'_f, \Theta'_f \circledast R, \Theta'_f \circledast \Omega_\delta$ evită trivialitatea anterior menţionată iar $\Theta'_f \circledast \Theta'_0$ rămâne trivială[9]*. Ajungerea la această concluzie a reprezentat scopul prezentei secţiuni.*

7. Accesibilitatea în sensul acceselor consecutive

OBSERVATIE 80. *Considerăm sistemul f şi încercăm în acest moment să valorificăm intuiţia acumulată despre ce sunt controlabilitatea şi accesibilitatea. Prima idee de la care plecăm e punctul de vedere al lui Girard despre controlabilitate 'poţi ajunge oriunde doreşti (într-un interval de timp finit)', care e, în două variante asincrone*

$$\exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \tag{7.1}$$
$$\forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t'' > t', x(t'') = \mu''$$

şi

$$\forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \tag{7.2}$$
$$\forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t'' > t', x(t'') = \mu''.$$

(7.2) generează definiţiile a), c), e), g) ale controlabilităţii lui Megan din Observaţia 76:

$$\exists t' \in \mathbf{R}, \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t'' > t',$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \text{ si } x(t'') = \mu'';$$
$$\exists t' \in \mathbf{R}, \exists t'' > t', \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U,$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \text{ si } x(t'') = \mu'';$$
$$\forall t' \in \mathbf{R}, \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t'' > t',$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \text{ si } x(t'') = \mu'';$$
$$\exists \delta > 0, \forall t' \in \mathbf{R}, \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U,$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \text{ si } x(t' + \delta) = \mu''.$$

Punctul de vedere al lui Dragomir asupra controlabilităţii 'existenţa unei comenzi care poate conduce sistemul într-un interval de timp finit arbitrar de lung dintr-o stare arbitrară în stare de repaus' înseamnă valabilitatea uneia dintre

$$\forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \Theta'_f, \exists u \in U, \tag{7.3}$$
$$\forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t'' > t', x_{|[t'',\infty)} = \mu'',$$

$$\forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \Theta'_f, \exists u \in U, \tag{7.4}$$
$$\forall x \in f(u), \exists t' \in \mathbf{R}, x(t') = \mu' \text{ si } \exists t'' > t', x_{|[t'',\infty)} = \mu''.$$

Mulţimea stărilor de repaus (steady states) Θ'_f e presupusă a fi nevidă şi cele două versiuni ale definiţiei sunt asincrone din nou. Filozofia lui (7.3) şi (7.4) generează

[9] $\Theta'_f \circledast \Theta'_0 = \Theta'_f \otimes \Theta'_0 = \{(\mu, \mu)|\mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \forall x \in f(u), \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = \mu\}$

definiţiile b), d), f), h) ale controlabilităţii lui Megan [**20**] *(vezi Observaţia 76 din nou):*

$$\exists t' \in \mathbf{R}, \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \Theta'_f, \exists u \in U, \exists t'' > t',$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \ si\ x_{|[t'',\infty)} = \mu'';$$
$$\exists t' \in \mathbf{R}, \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \Theta'_f, \exists u \in U, \exists t'' > t',$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \ si\ x_{|[t'',\infty)} = \mu'';$$
$$\exists t' \in \mathbf{R}, \exists t'' > t', \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \Theta'_f, \exists u \in U,$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \ si\ x_{|[t'',\infty)} = \mu'';$$
$$\exists t' \in \mathbf{R}, \exists t'' > t', \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \Theta'_f, \exists u \in U,$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \ si\ x_{|[t'',\infty)} = \mu'';$$
$$\forall t' \in \mathbf{R}, \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \Theta'_f, \exists u \in U, \exists t'' > t',$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \ si\ x_{|[t'',\infty)} = \mu'';$$
$$\forall t' \in \mathbf{R}, \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \Theta'_f, \exists u \in U, \exists t'' > t',$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \ si\ x_{|[t'',\infty)} = \mu'';$$
$$\exists \delta > 0, \forall t' \in \mathbf{R}, \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu'' \in \Theta'_f, \exists u \in U,$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \ si\ x_{|[t'+\delta,\infty)} = \mu'';$$
$$\exists \delta > 0, \forall t' \in \mathbf{R}, \forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall \mu'' \in \Theta'_f, \exists u \in U,$$
$$\forall x \in f(u), x(t') = \mu' \ si\ x_{|[t'+\delta,\infty)} = \mu''.$$

Definiţia pe care Dragomir o dă accesibilităţii e bună doar pentru sistemele neanticipative în sensul Definiţiei 64: 'existenţa unei comenzi care să poată conduce un sistem din starea de repaus într-o stare arbitrară, deci accesul din starea de repaus la o stare arbitrară într-un interval de timp finit arbitrar de lung'. Aceasta înseamnă adevărul uneia dintre:

$$\exists \mu' \in \Theta'_f, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists v \in U, \forall y \in f(v), \exists t' \in \mathbf{R}, \tag{7.5}$$
$$u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \ si\ \forall x \in f(u), \exists t'' > t', x(t'') = \mu'',$$
$$\forall \mu' \in \Theta'_f, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists v \in U, \forall y \in f(v), \exists t' \in \mathbf{R}, \tag{7.6}$$
$$u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \ si\ \forall x \in f(u), \exists t'' > t', x(t'') = \mu''.$$

Iată definiţiile a'), b'), c'), d') din Observaţia 76 pe care profesorul Megan le dă accesibilităţii şi care îşi au originea în ideea exprimată prin (7.5):

$$\exists t' \in \mathbf{R}, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu' \in \Theta'_f, \exists u \in U, \exists v \in U, \exists t'' > t',$$
$$\forall y \in f(v), u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \ si\ \forall x \in f(u), x(t'') = \mu'';$$
$$\exists t' \in \mathbf{R}, \exists t'' > t, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu' \in \Theta'_f, \exists u \in U, \exists v \in U,$$
$$\forall y \in f(v), u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \ si\ \forall x \in f(u), x(t'') = \mu'';$$
$$\forall t' \in \mathbf{R}, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu' \in \Theta'_f, \exists u \in U, \exists v \in U, \exists t'' > t',$$
$$\forall y \in f(v), u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \ si\ \forall x \in f(u), x(t'') = \mu'';$$
$$\exists \delta > 0, \forall t' \in \mathbf{R}, \forall \mu'' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu' \in \Theta'_f, \exists u \in U, \exists v \in U,$$
$$\forall y \in f(v), u_{|(-\infty,t')} = v_{|(-\infty,t')}, y_{|[t',\infty)} = \mu' \ si\ \forall x \in f(u), x(t'+\delta) = \mu''$$

şi similar pentru definiţiile a'), b'), c'), d'), care îşi au originea în (7.6).

Acum modalitatea de construcţie a propritǎţilor de accesibilitate e evidentă.

CAPITOLUL 8

Stabilitatea

Sistemele absolut stabile f sunt acelea pentru care $\forall u \in U, \forall x \in f(u)$, există limita $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ în timp ce sistemele relativ stabile sunt definite prin $\forall u \in U$, dacă există $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$, atunci $\forall x \in f(u)$, există $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$. Aceste proprietăţi sunt asociate cu un alt tip de aşteptări legate de comportamentul circuitelor asincrone. Stabilitatea relativă la o funcţie Booleană F generalizează stabilitatea relativă prin înlocuirea lui $\exists \lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ cu $\exists \lim\limits_{t\to\infty} F(u(t))$ şi defineşte sistemele combinaţionale. Importanţa acestor proprietăţi constă în posibilitatea de a caracteriza f în timp discret. Într-adevăr, momentele de timp $t \geq t_f$, când toţi x, respectiv u şi toţi x, respectiv $F(u)$ şi toţi x au devenit stabile pot fi alese ca momente de timp discret.

În acest capitol se definesc şi se comentează cele trei tipuri de stabilitate.

1. Stabilitatea absolută

OBSERVATIE 81. *Să recapitulăm pentru început unele din faptele prezentate anterior şi care sunt legate de stabilitatea absolută.*

Fie sistemul $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$. *El se numeşte* ***absolut stabil*** *şi mai spunem că* f ***are stări finale (valori finale ale stărilor)*** *dacă*

$$\forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu \tag{1.1}$$

e adevărată. În cazul în care

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu, \tag{1.2}$$

atunci el e numit ***absolut stabil fără curse*** *şi dacă*

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu \tag{1.3}$$

atunci f *e numit* ***constant absolut stabil****. În aceste definiţii* t_f, μ *sunt numite* ***timp final*** *şi respectiv* ***starea finală*** *(sau* ***valoarea finală a stării****). În (1.2) starea finală* μ *e numită* ***fără curse*** *şi în (1.3) e numită* ***constantă****. Aceste noţiuni apar în Definiţiile 25,...,27 care au fost date în cazul mai general al pseudo-sistemelor în timp ce timpul final nemărginit, mărginit şi fix apare în Definiţiile 31,...,33. Posibilităţile de a combina diferitele tipuri de stări finale şi timp final sunt listate în Teorema 26.*

Noţiunea de valoare finală a unei funcţii binare e introdusă alături de duala sa, valoarea iniţială, prin Definiţia 14. Notaţiile valorii finale a lui x *sunt* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ *şi* $x(\infty - 0)$. *Funcţia stare finală* ϕ_f *care asociază fiecărei intrări* u *mulţimea* $\{x(\infty - 0) | x \in f(u)\}$ *apare în Definiţia 35, alături de mulţimea stărilor finale* Θ_f.

Conceptul de sistem introduce o asimetrie între existenţa stărilor iniţiale şi existenţa stărilor finale. Aceasta se datoreşte în principal faptului că obişnuim să raţionăm într-o manieră neanticipativă, de la trecut la viitor şi, în general, avem *nevoie să cerem existenţa stărilor iniţiale. Modul în care pseudo-sistemele induc, în cazul sistemelor, proprietăţile de existenţă ale stărilor iniţiale/finale respectiv de existenţă a timpului iniţial/final a fost arătat în Teoremele 31 şi 32.*

Sistemele absolut stabile sunt acelea unde stabilizarea stării se produce indiferent dacă intrarea se stabilizează sau nu, următoarele implicaţii

$$(1.3) \Longrightarrow (1.2) \Longrightarrow (1.1)$$

fiind adevărate. Sistemele absolut stabile f *au definită funcţia stare finală* $\phi_f : U \to P^*(\mathbf{B}^n)$. *În cazul stabilităţii absolute fără curse,* $\phi_f : U \to \mathbf{B}^n$ *e funcţie univocă şi dacă* f *e constant absolut stabil, atunci* ϕ_f *e funcţie univocă constantă. Putem identifica vectorul binar* $\mu \in \mathbf{B}^n$ *cu funcţia vectorială constantă* $x(t) = \mu$, *ceea ce ne permite să definim pentru sistemul absolut stabil* f *sistemul* $\lim f : U \to P^*(S^{(n)})$ *prin* $\forall u \in U, \lim f(u) = \{x(\infty - 0)|x \in f(u)\}$. *Dacă* f *e absolut stabil fără curse, atunci* $\lim f$ *e determinist în timp ce pentru* f *constant absolut stabil,* $\lim\ f$ *e determinist şi autonom.*

Introducem dualul lui f_μ, *restricţia sistemului absolut stabil* f *la starea iniţială (la valoarea iniţială a stării)* μ *(Exemplul 20*[1]*). Pentru o stare finală arbitrară* $\mu \in \Theta_f$ *a lui* f, *sistemul* $f^\mu : U^\mu \to P^*(S^{(n)})$ *e definit prin*

$$U^\mu = \{u|u \in U, \mu \in \phi_f(u)\},$$

$$\forall u \in U^\mu, f^\mu(u) = \{x|x \in f(u), x(\infty - 0) = \mu\}.$$

Sistemul f^μ *e un subsistem al lui* f *numit* ***restricţia lui*** f ***la valoarea finală a stării (la starea finală)*** μ.

Prezentăm în continuare câteva proprietăţi.

Dacă g *are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă), atunci orice* $f \subset g$ *are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) (Teorema 36). Dacă* g *are stări finale şi* $f \subset g$, *avem* $\forall u \in U, \phi_f(u) \subset \gamma_f(u)$ *(Teorema 40). Dacă* g *are timp final mărginit (timp final fix), atunci orice* $f \subset g$ *are timp final mărginit (timp final fix) (Teorema 38).*

Sistemul f *are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) dacă şi numai dacă* f^* *are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) (Teorema 44) în timp ce* f *are timp final mărginit (timp final fix) dacă* f^* *are timp final mărginit (timp final fix) (Teorema 46). Teorema 48 ne arată că stabilitatea absolută a lui* f *implică* $\forall u \in U^*, \phi^*_f(u) = \{\overline{\mu}|\mu \in \phi_f(\overline{u})\}$.

Sistemele f *şi* f' *au stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) dacă* $f \times f'$ *are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) (Teorema 58). Sistemele* f *şi* f' *au timp final mărginit (timp final fix) dacă şi numai dacă* $f \times f'$ *are timp final mărginit (timp final fix) (Teorema 60). Dacă* f, f' *au stări finale, avem* $\forall u \times u' \in U \times U', (\phi \times \phi')_f(u \times u') = \phi_f(u) \times \phi'_f(u')$ *(Teorema 62).*

Dăm în continuare fără demonstraţii câteva proprietăţi similare precedentelor, relative la legarea în paralel (f, f'_1) *şi care nu au mai fost menţionate până acuma. Presupunem că* $U \cap U'_1 \neq \emptyset$. *Dacă* f, f'_1 *au stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) atunci* (f, f'_1) *are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă). În cazul când* f *şi* f'_1 *au timp final mărginit (timp final fix), avem că*

[1] O construcţie mai adecvată a acestei dualităţi ar trebui să pornească de la pseudo-sistemul f_* care în general nu are valori iniţiale ale stării, însă are valori finale şi apoi să luăm o valoare finală $\mu \in \Theta_f$ etc. Expresia 'dualul lui f_μ' are o anumită imprecizie.

(f, f'_1) posedă un timp final mărginit (timp final fix). Pe de altă parte, putem scrie că $\forall u \in U \cap U'_1, (\phi, \phi'_1)_f(u) = \phi_f(u) \times \phi'_{1f}(u)$.

Revenim la listarea unor proprietăţi de stabilitate menţionate anterior. Dacă h are stări finale (stare finală constantă) şi sistemul $h \circ f$ e definit, atunci $h \circ f$ are stări finale (stare finală constantă) (Teorema 69). Dacă h are timp final fix şi $h \circ f$ există, atunci $h \circ f$ are timp final fix (Teorema 71). Fie sistemele f şi h astfel încât $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \subset X$ să fie adevărată. Să presupunem că h are stări finale şi folosim notaţiile η_f, δ_f pentru funcţiile stare finală ale lui $h, h \circ f$. Următoarea formulă din Teorema 73 e adevărată:

$$\forall u \in U, \delta_f(u) = \bigcup_{x \in f(u)} \eta_f(x).$$

Dacă f are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) şi dacă există $f \cap g$, atunci $f \cap g$ are stări finale (stări finale fără curse, stare finală constantă) (Teorema 82). Dacă f are timp final mărginit (timp final fix) şi dacă există $f \cap g$, atunci $f \cap g$ are timp final mărginit (timp final fix) (Teorema 84). Dacă f, g au stări finale şi dacă mulţimea $W = \{u | u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}$ e nevidă atunci, conform Teoremei 86, avem

$$\forall u \in W, (\phi \cap \gamma)_f(u) = \phi_f(u) \cap \gamma_f(u).$$

Dacă f, g au stări finale, atunci $f \cup g$ are de asemenea stări finale; dacă f, g au stări finale fără curse şi $\forall u \in U \cap V, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, atunci $f \cup g$ posedă stări finale fără curse. Dacă f, g au stări finale constante şi $\bigcup\limits_{u \in U} f(u) \cap \bigcup\limits_{u \in V} g(u) \neq \emptyset$, atunci, datorită Teoremei 95, putem afirma că $f \cup g$ are stare finală constantă. Dacă f, g au timp final mărginit (timp final fix), atunci $f \cup g$ are timp final mărginit (timp final fix) (Teorema 97). Presupunem că f, g au stări finale. Prin Teorema 99, avem că funcţia stare finală $(\phi \cup \gamma)_f : U \cup V \to P^*(\mathbf{B}^n)$ satisface

$$\forall u \in U \cup V, (\phi \cup \gamma)_f(u) = \begin{cases} \phi_f(u),\ u \in U \setminus V \\ \gamma_f(u),\ u \in V \setminus U \\ \phi_f(u) \cup \gamma_f(u),\ u \in U \cap V \end{cases}.$$

Funcţia stare finală constantă dată de existenţa lui $k \in \{1, ..., 2^n\}$ şi a lui $\mu^1, ..., \mu^k \in \mathbf{B}^n$ aşa încât $\forall u \in U, \phi_f(u) = \{\mu^1, ..., \mu^k\}$ se tratează în mod dual cu funcţia stare iniţială constantă din Secţiunea 1, Capitolul 5. Sensul lui $\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \phi_f(u) = \mu$ e acela de stabilitate absolut constantă.

Fie sistemul autonom $f = X$. Duala Teoremei 113 afirmă că proprietatea de existenţă a stării finale e dată de

$$\forall x \in X, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu,$$

în timp ce existenţa stărilor finale fără curse coincide cu existenţa stării finale constante şi e dată de

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in X, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu.$$

Duala Teoremei 114 afirmă că pentru sistemul autonom $f = X$ existenţa timpului final mărginit şi a timpului final fix coincid ambele cu

$$\exists t_f \in \mathbf{R}, \forall x \in X, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu.$$

Duala Teoremei 115 afirmă că pentru sistemul autonom absolut stabil $f = X$ există următoarele posibilităţi: f are stări finale şi timp final nemărginit

$$\forall x \in X, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

f are stări finale şi timp final mărginit

$$\exists t_f \in \mathbf{R}, \forall x \in X, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

f are stări finale fără curse şi timp final nemărginit

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in X, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu;$$

şi respectiv f are stări finale fără curse şi timp final mărginit

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall x \in X, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu.$$

Duala Teoremei 116 afirmă că funcţia stare finală a sistemului autonom absolut stabil f e constantă şi egală cu mulţimea stărilor finale.

Dacă un sistem determinist e absolut stabil, atunci el e absolut stabil fără curse. Dacă f e un sistem finit absolut stabil, atunci el are un timp final mărginit, conform dualei Teoremei 124. În particular, sistemele combinaţionale ideale absolut stabile sunt absolut stabile fără curse şi au timp final mărginit.

Dacă f e absolut stabil şi auto-dual, atunci funcţia stare finală satisface $\phi_f = \phi_f^*$, conform cu duala Teoremei 145.

Fie f absolut stabil şi simetric. Atunci funcţia stare finală satisface

$$\forall u \in U, \phi_f(u) = \phi_f(u_\sigma)$$

pentru orice bijecţie $\sigma \in S(\{1, ..., m\})$, după cum rezultă din duala Teoremei 153.

Dacă sistemul absolut stabil f e invariant în timp, atunci, din duala Teoremei 161, obţinem că funcţia sa stare finală îndeplineşte

$$\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \phi_f(u \circ \tau^d) = \phi_f(u).$$

2. Stabilitatea relativă

DEFINITIE 86. *a) Un sistem f pentru care următoarea proprietate e satisfăcută*

$$\forall u \in U \cap S_c^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu$$

*se numeşte **relativ stabil**.*

b) Dacă proprietatea

$$\forall u \in U \cap S_c^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu$$

*e adevărată, atunci f e numit **relativ stabil fără curse**.*

*c) Sistemul f e **constant relativ stabil** dacă*

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U \cap S_c^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu.$$

Atunci când $U \cap S_c^{(m)} = \emptyset$, spunem că proprietăţile precedente de stabilitate sunt îndeplinite în mod trivial.

OBSERVATIE 82. *Sistemele relativ stabile sunt acele sisteme pentru care stabilizarea intrării produce stabilizarea stării: $\forall u \in U, \forall x \in f(u)$,*

$$\exists \lim_{t\to\infty} u(t) \Longrightarrow \exists \lim_{t\to\infty} x(t),$$

în timp ce dacă limita $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ nu există, atunci limita $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ poate să nu existe nici ea.

Stabilitatea relativă se analizează similar cu stabilitatea absolută.

3. Stabilitatea relativă la o funcţie. Sisteme combinaţionale

NOTATIE 23. *Fie funcţia Booleană* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$. *Notăm*

$$S_{F,c}^{(m)} = \{u | u \in S^{(m)}, F(u) \in S_c^{(n)}\}.$$

DEFINITIE 87. *a) Un sistem* f *care satisface*

$$\forall u \in U \cap S_{F,c}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu$$

se numeşte $F-$***relativ stabil****, sau încă* ***stabil relativ la funcţia*** F.

b) Dacă următoarea proprietate

$$\forall u \in U \cap S_{F,c}^{(m)}, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \lim_{\xi \to \infty} F(u(\xi))$$

are loc, atunci f *e numit* $F-$***relativ stabil fără curse****, sau* ***stabil fără curse relativ la funcţia*** F. *O altă terminologie pentru* f *e aceea de* ***sistem combinaţional*** *şi în această terminologie* F *e numită* ***funcţie generatoare a lui*** f.

c) Sistemul f *este* ***constant*** $F-$***relativ stabil*** *dacă este* $F-$*relativ stabil fără curse şi dacă funcţia* $F : U \to S^{(n)}$ *e constantă,* $F = \mu$:

$$\exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu.$$

În cazul când $U \cap S_{F,c}^{(m)} = \emptyset$, *spunem că precedentele proprietăţi de stabilitate au loc în mod trivial.*

OBSERVATIE 83. *Noţiunile de stabilitate constantă relativă la* F *şi respectiv de stabilitate absolut constantă coincid. Pe de altă parte, dacă* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$ *e funcţia constantă, atunci* $S_{F,c}^{(m)} = S^{(m)}$ *şi în Definiţia 87:*

punctul a) coincide cu stabilitatea absolută;

punctul b) coincide cu punctul c) (şi cu stabilitatea absolut constantă).

Stabilitatea fără curse relativă la F *e o proprietate de stabilitate de tipul 'fără curse' într-adevăr:*

$$\forall u \in U \cap S_{F,c}^{(m)}, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu,$$

unde $\mu = \lim_{\xi \to \infty} F(u(\xi))$. *De exemplu, sistemele combinaţionale ideale* F_d *sunt stabile fără curse relative la* F.

Analiza acestui tip de stabilitate se face similar cu aceea care s-a făcut la stabilitatea absolută.

În Figura 1 dăm legătura care există între cele nouă tipuri de stabilitate pe care le-am definit.

În acest moment cele trei tipuri de timp final t_f: *nemărginit mărginit şi fix*

$$\forall u \in U, \forall x \in f(u) \cap S_c^{(n)}, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_f, x(t) = x(t_f);$$

$$\forall u \in U, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u) \cap S_c^{(n)}, \forall t \geq t_f, x(t) = x(t_f);$$

$$\exists t_f \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall x \in f(u) \cap S_c^{(n)}, \forall t \geq t_f, x(t) = x(t_f)$$

se pot combina cu cele nouă tipuri (nedistincte) de stabilitate. Rezultă de aici 27 de posibilităţi (nedistincte), aşa ca în Teorema 26 care caracterizează pseudo-sistemele.

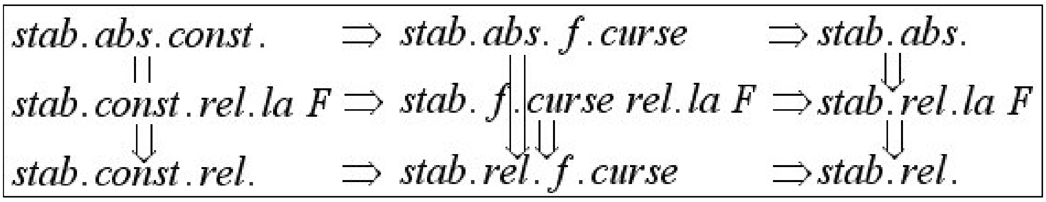

FIGURA 1. Legătura dintre diferitele tipuri de stabilitate

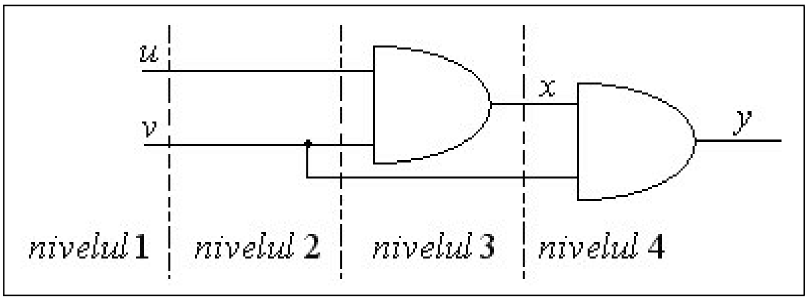

FIGURA 2. Sistem combinaţional

EXEMPLU 89. *Fie circuitul din Figura 2, în care* $u, v, x, y \in S$. *Sistemele* u *şi* v *sunt combinaţionale, în sensul că semnalele pot fi identificate cu sistemul combinaţional ideal* $1_S : S \to S$. *Atunci produsul cartezian* $u \times v$ *e un sistem combinaţional ideal, reprezentând nivelul 1 de analiză al circuitului.*

La nivelul 2 avem, pe de o parte, legarea în paralel (v, v) *care e un sistem combinaţional ideal şi, pe de altă parte, produsul cartezian* $u \times (v, v)$ *care e de asemenea un sistem combinaţional ideal. Funcţia sa generatoare e* $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$.

La al 3-lea nivel de analiză al circuitului avem funcţia Booleană produs $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 \cdot \lambda_2$ *şi circuitul combinaţional corespunzător, care e în produs cartezian cu* v. *Funcţia generatoare e* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto (\lambda_1 \cdot \lambda_2, \lambda_3)$.

La nivelul 4 avem un sistem combinaţional cu funcţia generatoare produs.

Concluzionăm că sistemul $f : S^{(2)} \to P^*(S)$ *care modelează circuitul din Figura 2 e combinaţional, aşa cum se deduce din legarea în serie, legarea în paralel şi produsele carteziene ale sistemelor combinaţionale. Funcţia sa generatoare este* $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

4. Stabilitatea absolută a sistemelor neanticipative

TEOREMĂ 227. *Presupunem că sistemul absolut stabil* f *satisface proprietatea de neanticipativitate din Definiţia 64:* $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\}$$

şi că are de asemenea timpul final fix t_f. *Atunci* $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,

$$(u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \text{ si } t \geq t_f) \Longrightarrow f(u) = f(v),$$

i.e. $f(u)$ *depinde doar de restricţia* $u_{|(-\infty,t_f)}$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $t_1 \in \mathbf{R}$, $u \in U$, $v \in U$ alese în mod arbitrar, aşa încât

$$u_{|(-\infty,t_1)} = v_{|(-\infty,t_1)} \; si \; t_1 \geq t_f$$

să fie adevărată. Neanticipativitatea lui f dă

$$\{x_{|(-\infty,t_1]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t_1]} | y \in f(v)\}.$$

Din stabilitatea absolută cu timp final fix a lui f (vezi Teorema 26, c)) obţinem

$$\forall x \in f(u), \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \forall t \geq t_f, x(t) = \mu,$$

$$\forall y \in f(v), \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \forall t \geq t_f, y(t) = \mu'$$

şi, deoarece $t_1 \geq t_f$, concluzionăm că $\mu = \mu'$ şi $f(u) = f(v)$. □

TEOREMĂ 228. *Fie f neanticipativ în sensul Definiţiei 64.*

a) Dacă f e absolut stabil şi are timpul final fix t_f, atunci funcţia sa stare finală ϕ_f satisface $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,

$$(u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \; si \; t \geq t_f) \Longrightarrow \phi_f(u) = \phi_f(v),$$

i.e. $\phi_f(u)$ depinde doar de restricţia $u_{|(-\infty,t_f)}$.

b) În cazul că f e absolut stabil fără curse şi are timpul final fix t_f, avem $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,

$$(u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \; si \; t \geq t_f) \Longrightarrow \forall x \in f(u), \forall y \in f(v), \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t),$$

i.e. limita $\lim_{t\to\infty} x(t)$, care e aceeaşi pentru toţi $x \in f(u)$, depinde doar de $u_{|(-\infty,t_f)}$.

c) Dacă f e constant absolut stabil, atunci

$$\forall u \in U, \forall v \in U, \forall x \in f(u), \forall y \in f(v), \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t).$$

Cu alte cuvinte, $\lim_{t\to\infty} x(t)$ e aceeaşi pentru toţi $u \in U$ şi toţi $x \in f(u)$.

DEMONSTRAŢIE. a) Din teorema precedentă avem că $f(u) = f(v)$. Aşadar

$$\phi_f(u) = \{x(\infty - 0) | x \in f(u)\} = \{y(\infty - 0) | y \in f(v)\} = \phi_f(v).$$

b) Acesta e cazul particular al lui a) când ϕ_f e univocă.

c) Cazul particular al lui b) când ϕ_f e funcţia constantă. □

5. Exemple

EXEMPLU 90. *Considerăm următoarele sisteme:*

$f_1 : S \to S, \forall u \in S, f_1(u) = u;$

$f_2 : S \to S, \forall u \in S, f_2(u) = u(0);$

$f_3 : S \to S, \forall u \in S, f_3(u) = 1;$

$f_4 : S \to P^*(S), \forall u \in S, f_4(u) = \{0, 1\};$

$f_5 : S \to P^*(S), \forall u \in S, f_5(u) = \begin{cases} \{u, \overline{u}\}, u \in S_c \\ u, u \notin S_c \end{cases};$

$f_6 : S \to P^*(S), \forall u \in S, f_6(u) = \begin{cases} u, u \in S_c \\ \{0, 1\}, u \notin S_c \end{cases};$

$f_7 : S \to S, \forall u \in S, f_7(u) = \begin{cases} 1, u \in S_c \\ 0, u \notin S_c \end{cases};$

$f_8 : S \to S, \forall u \in S, f_8(u) = \begin{cases} 1, u \in S_c \\ \chi_{[0,1)\cup[2,3)\cup[4,5)\cup\ldots}, u \notin S_c \end{cases};$

$$f_9 : S \to P^*(S), \forall u \in S, f_9(u) = \begin{cases} 1, u \in S_c \\ \{0,1\}, u \notin S_c \end{cases};$$

$$f_{10} : S \to P^*(S), \forall u \in S, f_{10}(u) = \begin{cases} \{u \circ \tau^d | d \geq 0\}, u \in S_c \\ 0, u \notin S_c \end{cases}.$$

În Tabela 1 am descris comportamentul acestor sisteme relativ la noţiunile cunoscute de stabilitate şi relativ la timpul final prin scrierea unui '$\times$' atunci când proprietatea corespunzătoare e îndeplinită. Funcţia F din tabelă e identitatea: $F : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, $\forall \lambda \in \mathbf{B}$, $F(\lambda) = \lambda$, *pentru care* $S_{F,c} = S_c$.

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
stabilitate absolută		$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
stabilitate absolută fără curse		$\times$	$\times$				$\times$			$\times$
stabilitate absolută constantă			$\times$							
stabilitate relativă	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
stabilitate relativă fără curse	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
stabilitate relativă constantă			$\times$				$\times$	$\times$	$\times$	
stabilitate relativă la F	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
stabilitate relativă la F fără curse	$\times$					$\times$				$\times$
timp final nemărginit	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
timp final mărginit	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
timp final fix		$\times$	$\times$	$\times$			$\times$	$\times$	$\times$	

Tabela 1.

CAPITOLUL 9

Modul fundamental

Se consideră sistemul asincron $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$. Modul fundamental (de operare) al lui f e o intrare $u \in U$ cu proprietatea că există un şir $(\mu^k)_{k \in \mathbf{N}} \in \{0,1\}^n$ aşa încât toţi $x \in f(u)$ accesează în mod sincron valorile $\mu^0, \mu^1, \mu^2, ...$ în această ordine, unde μ^0 e valoarea iniţială şi $\mu^1, \mu^2, ...$ sunt valori finale. Dacă un sistem asincron nedeterminist f posedă moduri fundamentale, atunci el e interpretat sub acţiunea lor ca sincron, cu timp discret şi determinist.

După introducerea şi studiul transferurilor fundamentale, definim modul fundamental cu ajutorul lor. Se analizează mai multe proprietăţi importante ale modului fundamental. Capitolul se sfârşeşte cu investigarea modului fundamental relativ la o funcţie.

1. Introducere

Observatie 84. *Conceptul de mod fundamental e menţionat în multe lucrări sub o formă neformalizată. Să cităm pentru început* [**14**], *unde caracterizarea sa e: 'intrărilor li se permite sa-şi schimbe valoarea doar atunci când toate elementele de întârziere sunt stabile (i.e. au valoarea de intrare egală cu valoarea de ieşire)'. 'De observat că modul fundamental exclude' existenţa unui 'ciclu de oscilaţii', adică instabilitatea. Altundeva autorul lui* [**14**] *se referă la modul fundamental unde 'proiectantul trebuie să se asigure că intrările circuitului se pot modifica doar atunci când circuitul e stabil şi e pregătit să le accepte'. Aşadar modul fundamental e o intrare care satisface o succesiune de cerinţe de stabilitate.*

O opinie mai restrictivă asupra noţiunii se exprimă în [**28**]*: 'circuitul se presupune că e într-o stare' (i.e. într-o situaţie) 'în care toate semnalele de intrare, semnalele interne şi semnalele de ieşire sunt stabile*[1]*. Într-o astfel de stare' (i.e. în aşa o situaţie) 'mediului i se permite să schimbe un semnal de intrare'. (Termenul de 'mediu' e utilizat de unii autori ca expresie a ideii de 'totul cu excepţia circuitului', în particular fiinţa umană care controlează probabil valoarea intrării şi observă ieşirea. Subliniem faptul că diferenţa dintre acest concept de mod fundamental şi precedentul tocmai a apărut, constând în schimbarea permisă a 'unui semnal de intrare' doar, i.e. a unei funcţii coordonată $u_j, j \in \{1, ..., m\}$.) Citäm în continuare din* [**28**]*: 'După aceasta, mediului nu i se permite să schimbe valoarea semnalelor de intrare din nou până când întregul circuit s-a stabilizat'. Autorii lui* [**28**] *arată că 'mediul' trebuie să ştie momentul când a avut loc stabilizarea circuitului-sistem pentru a putea menţine intrarea constantă suficient de mult timp şi e pomenit aici*

[1] În acest context, 'semnalele interne' sunt stările şi ele coincid cu 'semnalele de ieşire'. Afirmaţia se interpretează ca fiind existenţa lui $u \in U, \lambda \in \mathbf{B}^m, \mu \in \mathbf{B}^n$ şi t_1 aşa încât $u(t_1) = \lambda, x(t_1) = \mu$ şi $\forall t_2 > t_1$, $u_{|[t_1,t_2)} = \lambda$ implică $\forall x \in f(u), x_{|[t_1,t_2)} = \mu$.

numele lui David Huffman care a definit (informal) pentru întâia oară modul fundamental în lucrările sale din anii '50.

În acest moment cei doi editori ai lui [**28**] *arată cum modul fundamental al lui Luciano Lavagno e regăsit sub noul nume de 'mod exploziv*[2]*. 'Lucrări ulterioare au generalizat tratarea modului fundamental prin acceptarea unei forme restricţionate de schimbări multiple ale intrarii şi ale ieşirii' (întrebare pe care ne-o punem: până în acest moment toţi* $x \in f(u)$ *au comutat cu o singură coordonată* $x_i, i \in \{1, ..., n\}$ *o dată?) 'Acest caz e numit modul exploziv. Când se găseşte într-o stare stabilă, circuitul aflat sub acţiunea unui mod exploziv va aştepta schimbarea unei mulţimi de semnale de intrare (într-o ordine arbitrară). După terminarea unei astfel de 'explozii' a intrării maşina calculează explozia semnalelor de ieşire şi noile valori ale variabilelor interne' (în teoria noastră, cele două coincid). 'Mediului nu i se permite să producă o nouă explozie a intrării până când circuitul nu a reacţionat în întregime la predecenta explozie - se presupune modul fundamental, însă doar între explozii de schimbări ale intrării'.*

Noţiunea de 'mod exploziv' e ea însăşi subiect de controverse în literatură. Aşadar ea nu e un înlocuitor evident al 'modului fundamental' al lui Lavagno, cu care e pus în relaţie de către Sparso şi Furber. Deoarece în acest moment dezbaterea capătă arome amuzante, reproducem şi punctul de vedere din Webopedia, 'enciclopedia online numărul 1 dedicată tehnologiei computerului'. După reproducerea mai multor tehnici de implementare ale modului exploziv, autorii concluzionează: 'caracteristica unică pe care toate modurile explozive o au în comun e că ele sunt temporare şi nesustenabile. Ele admit rate de transfer ale datelor mai rapide decât în mod normal, însă numai pentru o perioadă limitată de timp şi numai în condiţii speciale'.

Adoptăm terminologia de mod fundamental pentru o intrare u caracterizată prin aceea că stările $x \in f(u)$ *accesează în mod sincron o valoare iniţială* $\mu^0 \in \mathbf{B}^n$ *şi o familie* $(\mu^k)_{k\geq 1} \in \mathbf{B}^n$ *de valori finale, unde şirul* $(\mu^k)_{k\in \mathbf{N}}$ *e independent de* x*. Aceasta generalizează modul fundamental al lui Lavagno şi modul exploziv al lui Sparso şi Furber (vezi Secţiunea 8 din acest capitol).*

Se observă cu uşurinţă că tocmai acumulata intuiţie asupra conceptului de mod fundamental presupune existenţa neanticipativităţii. Prin neanticipativitatea lui $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ *înţelegem în prezentul capitol şi în lipsa altor precizări proprietatea din Definiţia 64:* $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\}.$$

Singurul caz în care această proprietate de neanticipativitate va fi înlocuită de o alta e acela din Secţiunea 10, în care spunem în mod explicit că cerem neanticipativitatea relativă la o funcţie Booleană $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$*, deci confuziile nu sunt posibile.*

2. Transferurile fundamentale

TEOREMĂ 229. *Fie sistemul neanticipativ* f *şi fixăm* $t_0 \in \mathbf{R}, u \in U$, $\mu \in \mathbf{B}^n$*. Accesul sincron al lui* f*, sub intrarea* u*, la* μ*, în momentul de timp* t_0*, definit prin*

$$\forall x \in f(u), x(t_0) = \mu, \tag{2.1}$$

e echivalent cu următoarea proprietate

$$\exists v \in U, u_{|(-\infty,t_0)} = v_{|(-\infty,t_0)}, \forall y \in f(v), y(t_0) = \mu. \tag{2.2}$$

[2]în limba engleză 'burst mode'

DEMONSTRAŢIE. (2.1)$\Longrightarrow$(2.2) e evidentă, cu $v = u$.

(2.2)$\Longrightarrow$(2.1). Din $u_{|(-\infty,t_0)} = v_{|(-\infty,t_0)}$ şi din neanticipativitatea lui f deducem că $\{x_{|(-\infty,t_0]}|x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t_0]}|y \in f(v)\}$. În particular, avem

$$\{x(t_0)|x \in f(u)\} = \{y(t_0)|y \in f(v)\} = \mu,$$

i.e. (2.1) e adevărată. □

OBSERVATIE 85. *Când f e neanticipativ, ne propunem să extindem rezultatul exprimat prin Teorema 229 (urmând o idee care a apărut pentru întâia oară în Teorema 226 şi Definiţia 85) la posibilele echivalenţe ale accesului iniţial sincron şi ale accesului final sincron al lui f la μ, definite prin*

$$\forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu, \tag{2.3}$$

$$\forall x \in f(u), x_{|[t_0,\infty)} = \mu \tag{2.4}$$

cu

$$\exists v \in U, u_{|(-\infty,t_0)} = v_{|(-\infty,t_0)}, \forall y \in f(v), y_{|(-\infty,t_0)} = \mu, \tag{2.5}$$

$$\exists v \in U, u_{|(-\infty,t_0)} = v_{|(-\infty,t_0)}, \forall y \in f(v), y_{|[t_0,\infty)} = \mu. \tag{2.6}$$

Remarcăm că

- echivalenţa (2.3)$\Longleftrightarrow$(2.5) e adevărată,

- echivalenţa (2.4)$\Longleftrightarrow$(2.6) nu are loc. În timp ce (2.4) ne arată că toţi $x \in f(u)$, începând de la momentul iniţial al timpului t_0, devin egali cu μ, (2.6) afirmă că toţi $x \in f(u)$ satisfac $x(t_0) = \mu$ şi, pentru $t > t_0$, pot păstra valoarea μ dacă, de exemplu, $u = v$.

Fixăm $t_0 < t_1, u \in U$ şi $\mu, \mu' \in \mathbf{B}^n$ şi aplicăm observaţiile anterioare la două tipuri de accese consecutive sincrone care ne interesează, anume atunci când μ e valoarea iniţială şi μ' e valoarea finală

$$\forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu \text{ si } x_{|[t_1,\infty)} = \mu', \tag{2.7}$$

respectiv când μ, μ' sunt ambele valori finale

$$\forall x \in f(u), x_{|[t_0,\infty)} = \mu \text{ si } x_{|[t_1,\infty)} = \mu'. \tag{2.8}$$

Să înlocuim în (2.7) şi (2.8) accesele sincrone ale lui x la valorile finale prin (2.6). După câteva calcule care ţin cont de neanticipativitatea lui f, obţinem proprietăţile

$$\exists v \in U, u_{|(-\infty,t_1)} = v_{|(-\infty,t_1)}, \forall y \in f(v), y_{|(-\infty,t_0)} = \mu \text{ si } y_{|[t_1,\infty)} = \mu', \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &\exists v \in U, u_{|(-\infty,t_0)} = v_{|(-\infty,t_0)}, \forall y \in f(v), y_{|[t_0,\infty)} = \mu \text{ si} \\ &\text{si } \exists v' \in U, u_{|(-\infty,t_1)} = v'_{|(-\infty,t_1)}, \forall y' \in f(v'), y'_{|[t_1,\infty)} = \mu'. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Fiecare dintre afirmaţiile neechivalente (2.7) şi (2.9) descrie accesele lui f, mai întâi la valoarea iniţială μ, apoi la valoarea finală μ', cu deosebirea că în primul caz toţi $x \in f(u)$ se stabilizează la μ', în timp ce în al doilea caz toţi $x \in f(u)$ se pot stabiliza la μ', de exemplu în situaţia când $u = v$.

Afirmaţiile neechivalente (2.8) şi (2.10) dau două moduri complet diferite de acces sincron mai întâi la valoarea μ, apoi la valoarea μ', în sensul că în (2.8) avem trivialitatea necesară $\mu = \mu'$ în timp ce în (2.10) există posibilitatea ca $\mu \neq \mu'$.

În precedentele proprietăţi există posibilitatea ca $\mu = \mu'$ = punct de echilibru

$$\forall x \in f(u), x = \mu, \tag{2.11}$$

cu trivialităţile care decurg din acest lucru.

DEFINITIE 88. *Presupunem că (2.9) e adevărată şi notăm*

$$\mu \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\rightarrow} \mu' = \{x_{|(-\infty,t_1]} | x \in f(u)\}. \tag{2.12}$$

Atunci mulţimea $\mu \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$ *e numită* ***transferul fundamental iniţial al (stărilor) lui*** f, ***sub intrarea*** u, ***de la valoarea iniţială*** μ ***la valoarea finală*** μ'.

Invers, afirmarea faptului că $\mu \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$, *definită prin (2.12), e un transfer fundamental iniţial înseamnă existenţa unui* $t_0 < t_1$ *aşa încât (2.9) e satisfăcută.*

DEFINITIE 89. *Dacă (2.10) e adevărată, notăm*

$$\mu \overset{u_{|[t_0,t_1)}}{\rightarrow} \mu' = \{x_{|[t_0,t_1]} | x \in f(u)\}. \tag{2.13}$$

Atunci mulţimea $\mu \overset{u_{|[t_0,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$ *e numită* ***transfer fundamental neiniţial al (stărilor) lui*** f, ***sub intrarea*** u, ***de la valoarea finală*** μ ***la valoarea finală*** μ'.

Invers, afirmaţia că $\mu \overset{u_{|[t_0,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$, *definită prin (2.13), e un transfer fundamental neiniţial înseamnă îndeplinirea lui (2.10).*

DEFINITIE 90. *Dacă (2.11) e satisfăcută, notăm*

$$(\mu \overset{u}{=} \mu) = \{\mu\}. \tag{2.14}$$

Fie μ *un punct de echilibru. Atunci* $\mu \overset{u}{=} \mu$ *e numită* ***transferul fundamental trivial al (stărilor) lui*** f, ***sub intrarea*** u.

Invers, atunci când spunem că $\mu \overset{u}{=} \mu$, *definită prin (2.14), e un transfer fundamental trivial, aceasta înseamnă adevărul lui (2.11).*

DEFINITIE 91. *Dacă transferul sincron* Γ *satisface* $\forall \gamma \in \Gamma$, γ *e monoton pe coordonate, atunci el se spune că e* ***fără hazard***.

OBSERVATIE 86. *În (2.9), de multe ori, sincronismul accesului stărilor la valoarea iniţială* μ *nu e necesar. Prezenţa lui e justificată doar de simetria expunerii.*

Pentru transferurile fără hazard, condiţia de monotonie pare a fi una de economie şi de normalizare, coordonatele lui x *nu comută mai mult decât e necesar, dar acest lucru are de fapt o semnificaţie funcţională.*

Transferurile fundamentale triviale sunt fără hazard.

3. Proprietăţi ale transferurilor fundamentale. Exemple

TEOREMĂ 230. *Fie sistemul neanticipativ* f *şi fixăm* $t_0, t_1 \in \mathbf{R}, t_0 < t_1, u \in U, \mu, \mu' \in \mathbf{B}^n$. *Dacă (2.7) este adevărată, atunci* $\mu \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$ *e un transfer fundamental iniţial, în timp ce dacă*

$$\exists v \in U, u_{|(-\infty,t_0)} = v_{|(-\infty,t_0)}, \forall y \in f(v), y_{|[t_0,\infty)} = \mu \text{ si } \forall x \in f(u), x_{|[t_1,\infty)} = \mu',$$

are loc, atunci $\mu \overset{u_{|[t_0,t_1)}}{\longrightarrow} \mu'$ *e un transfer fundamental neiniţial.*

DEMONSTRAŢIE. Prima ipoteză face adevărată (2.9) pentru $v = u$, în timp ce a doua ipoteză face adevărată (2.10) pentru $v' = u$. $\square$

TEOREMĂ 231. *Fie* f *neanticipativ şi presupunem că* $\mu \overset{u_{|I}}{\rightarrow} \mu'$ *e un transfer fundamental, unde* $I \subset \mathbf{R}$ *e un interval de forma* $(-\infty, t_1)$ *sau* $[t_0, t_1)$.

a) Dacă $I = (-\infty, t_1)$ şi $u' \in U$ e arbitrar cu $u_{|(-\infty,t_1)} = u'_{|(-\infty,t_1)}$, atunci $\mu \stackrel{u'_{|I}}{\rightarrow} \mu'$ e un transfer fundamental iniţial egal cu $\mu \stackrel{u_{|I}}{\rightarrow} \mu'$.

b) Dacă $I = [t_0, t_1)$, atunci $\forall u' \in U$, $u_{|(-\infty,t_1)} = u'_{|(-\infty,t_1)}$ implică aceea că $\mu \stackrel{u'_{|I}}{\rightarrow} \mu'$ e un transfer fundamental neiniţial egal cu $\mu \stackrel{u_{|I}}{\rightarrow} \mu'$.

Demonstraţie. a) Avem că $\mu \stackrel{u'_{|(-\infty,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$ e un transfer fundamental iniţial, i.e.

$$\exists t_0 < t_1, \exists v \in U, u'_{|(-\infty,t_1)} = v_{|(-\infty,t_1)},$$
$$\forall y \in f(v), y_{|(-\infty,t_0)} = \mu \; si \; y_{|[t_1,\infty)} = \mu'$$

are loc datorită ipotezei (2.9) şi a faptului că $u_{|(-\infty,t_1)} = u'_{|(-\infty,t_1)}$. Ţinem cont de neanticipativitatea lui f şi obţinem a doua afirmaţie a teoremei

$$\mu \stackrel{u_{|(-\infty,t_1)}}{\rightarrow} \mu' = \{x_{|(-\infty,t_1]} | x \in f(u)\} = \{x'_{|(-\infty,t_1]} | x' \in f(u')\} = \mu \stackrel{u'_{|(-\infty,t_1)}}{\rightarrow} \mu'.$$

b) E demonstrată în mod similar cu a). □

Exemplu 91. *Sistemul $f : S \to P^*(S)$ definit prin dubla inegalitate*

$$\bigcap_{\xi \in [t-1,t)} \overline{u(\xi)} \le x(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-1,t)} \overline{u(\xi)} \tag{3.1}$$

modelează calculul complementului logic al lui u, făcut cu o întârziere de o unitate de timp. Presupunem că e neanticipativ şi notăm prin $u = \chi_{[0,2)}$, $v = \chi_{[0,\infty)}$ intrările, pentru care inegalităţile $\bigcap_{\xi \in [t-1,t)} \overline{u(\xi)} \le x(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-1,t)} \overline{u(\xi)}$, $\bigcap_{\xi \in [t-1,t)} \overline{v(\xi)} \le y(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-1,t)} \overline{v(\xi)}$ devin

$$\chi_{(-\infty,0] \cup [3,\infty)}(t) \le x(t) \le \chi_{(-\infty,1) \cup (2,\infty)}(t), \tag{3.2}$$

$$\chi_{(-\infty,0]}(t) \le y(t) \le \chi_{(-\infty,1)}(t). \tag{3.3}$$

Din (3.3) deducem că

$$\forall y \in f(v), y_{|(-\infty,0)} = 1 \; si \; y_{|[1,\infty)} = 0$$

şi, deoarece

$$u_{|(-\infty,1)} = v_{|(-\infty,1)},$$

avem că $(1 \stackrel{u_{|(-\infty,1)}}{\rightarrow} 0) = (1 \stackrel{v_{|(-\infty,1)}}{\rightarrow} 0)$ e un transfer fundamental iniţial ((2.9) e adevărată). Din inegalităţile (3.2), (3.3) deducem de asemenea că

$$\forall y \in f(v), y_{|[1,\infty)} = 0,$$
$$\forall x \in f(u), x_{|[3,\infty)} = 1,$$

i.e. $0 \stackrel{u_{|[1,3)}}{\rightarrow} 1$ e un transfer fundamental neiniţial (din Teorema 230).

În general, tranziţiile $\gamma \in 1 \stackrel{u_{|(-\infty,1)}}{\rightarrow} 0$ şi $\gamma' \in 0 \stackrel{u_{|[1,3)}}{\rightarrow} 1$ nu sunt monotone. Ne întrebăm în ce condiţii, dacă aăugăm cerinţele[3] (de inerţie absolută)

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \le \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta]} x(\xi), \tag{3.4}$$

[3]dacă x comută de la 0 la 1, atunci el rămâne 1 mai mult decât δ unităţi de timp; dacă x comută de la 1 la 0, atunci el rămâne 0 mai mult decât δ unităţi de timp

$$x(t-0)\cdot\overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi\in[t,t+\delta]} \overline{x(\xi)} \tag{3.5}$$

în care $\delta \geq 0$, *lui (3.1) cu* $u = \chi_{[0,2)}$, *i.e. lui (3.2), e adevărată monotonia. Monotonia înseamnă că x comută de la 1 la 0 în intervalul* $(0,1]$ *şi că în acest interval el nu poate comuta de la 0 la 1 şi apoi de la 1 la 0 din nou. Fie* $0 < t_1 < t_2 < t_3 \leq 1$ *aşa încât*

$$x(t_1-0)\cdot\overline{x(t_1)} = \overline{x(t_2-0)}\cdot x(t_2) = x(t_3-0)\cdot\overline{x(t_3)} = 1.$$

Atunci, din îndeplinirea lui (3.4) şi a lui (3.5), avem $t_2 - t_1 > \delta, t_3 - t_2 > \delta$, *ceea ce înseamnă că* $1 > t_3 - t_1 > 2\delta$. *Aşadar, dacă* $\delta \geq \frac{1}{2}$, *astfel de* t_1, t_2, t_3 *nu există şi orice* $\gamma \in 1 \overset{u_{|(-\infty,1)}}{\rightarrow} 0$ *e o tranziţie monotonă. În mod similar,* $\delta \geq \frac{1}{2}$ *implică faptul că orice* $\gamma' \in 0 \overset{u_{|[1,3)}}{\rightarrow} 1$ *e monotonă.*

O altă condiţie e de asemenea cerută aici: după comutarea de la 1 la 0 din intervalul $(0,1]$, *lui x i se permite să comute de la 0 la 1 în intervalul* $(2,3]$. *Aceasta dă* $\delta < 3$.

Concluzia e următoarea: pentru $\delta \in [\frac{1}{2}, 3)$, *sistemul g care se obţine din intersecţia lui (3.1), (3.4), (3.5), unde* $u = \chi_{[0,2)}$, *are transferurile* $1 \overset{u_{|(-\infty,1)}}{\rightarrow} 0$, $0 \overset{u_{|[1,3)}}{\rightarrow} 1$ *fără hazard.*

4. Compunerea transferurilor fundamentale

Observatie 87. *Teorema 232 care va urma construieşte 'reuniunea'* $\vee$ *transferurilor fundamentale* $\mu \overset{u^0_{|(-\infty,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$ *şi* $\mu' \overset{u^1_{[t_2,t_3)}}{\rightarrow} \mu''$ *la a), respectiv a transferurilor fundamentale* $\mu \overset{u^0_{|[t_0,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$ *şi* $\mu' \overset{u^1_{[t_2,t_3)}}{\rightarrow} \mu''$ *la b) similar modului în care am procedat în Observaţia 70. Teorema reprezintă acea versiune a Teoremei 203 în care cele patru accese sunt sincrone,* μ *e valoare iniţială la a) şi finală la b) iar* μ', μ'' *sunt valori finale la a) şi b).*

Teoremă 232. *Fie* $f : U \rightarrow P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ *un sistem neanticipativ care satisface condiţiile:*

i) U e închisă sub translaţii şi sub 'concatenare'

$$\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in U, u \circ \tau^d \in U,$$

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U, u \cdot \chi_{(-\infty,t)} \oplus v \cdot \chi_{[t,\infty)} \in U;$$

*ii) neanticipativitate** $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,

$$(u_{|[t,\infty)} = v_{|[t,\infty)} \text{ si } \{x(t)|x \in f(u)\} = \{y(t)|y \in f(v)\}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \{x_{|[t,\infty)}|x \in f(u)\} = \{y_{|[t,\infty)}|y \in f(v)\};$$

iii) invarianţă în timp

$$\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in U, f(u \circ \tau^d) = \{x \circ \tau^d | x \in f(u)\}.$$

a) Presupunem că $t_0 < t_1$, $t_2 < t_3$, $u^0, u^1, v^1 \in U$ *şi* $\mu, \mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n$ *sunt arbitrare cu*

$$\forall x \in f(u^0), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu,$$

$$\forall x \in f(u^0), x_{|[t_1,\infty)} = \mu',$$

$$u^1_{|(-\infty,t_2)} = v^1_{|(-\infty,t_2)},$$

$$\forall y' \in f(v^1), y'_{|[t_2,\infty)} = \mu',$$

$$\forall x' \in f(u^1), x'_{|[t_3,\infty)} = \mu''.$$

Notăm $d = t_1 - t_2$ *şi*

$$\widetilde{u}_\varepsilon = u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1+\varepsilon)} \oplus (u^1 \circ \tau^{d+\varepsilon}) \cdot \chi_{[t_1+\varepsilon,\infty)}$$

pentru $\varepsilon \geq 0$. *Avem*

$$\forall \widetilde{x} \in f(\widetilde{u}_\varepsilon), \widetilde{x}_{|(-\infty,t_0)} = \mu,$$

$$\forall \widetilde{x} \in f(\widetilde{u}_\varepsilon), \widetilde{x}_{|[t_3+d+\varepsilon,\infty)} = \mu'',$$

ceea ce înseamnă că dacă $\mu \overset{u^0_{|(-\infty,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$ *e fundamental iniţial şi* $\mu' \overset{u^1_{|[t_2,t_3)}}{\rightarrow} \mu''$ *e fundamental neiniţial, atunci* $\mu \overset{\widetilde{u}_{\varepsilon|(-\infty,t_3+d+\varepsilon)}}{\rightarrow} \mu''$ *e fundamental iniţial. Cu alte cuvinte, dacă* $f(u^0)$ *transferă în mod sincron valoarea iniţială* μ *în valoarea finală* μ' *şi dacă* $f(u^1)$ *transferă în mod sincron valoarea finală* μ' *în valoarea finală* μ'', *atunci* $f(\widetilde{u}_\varepsilon)$ *transferă în mod sincron valoarea iniţială* μ *în valoarea finală* μ''.

b) Presupunem că sunt date $t_0 < t_1$, $t_2 < t_3$, $u^0, v^0, u^1, v^1 \in U$ *şi* $\mu, \mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n$ *aşa încât*

$$u^0_{|(-\infty,t_0)} = v^0_{|(-\infty,t_0)}, \tag{4.1}$$

$$\forall y \in f(v^0), y_{|[t_0,\infty)} = \mu, \tag{4.2}$$

$$\forall x \in f(u^0), x_{|[t_1,\infty)} = \mu', \tag{4.3}$$

$$u^1_{|(-\infty,t_2)} = v^1_{|(-\infty,t_2)}, \tag{4.4}$$

$$\forall y' \in f(v^1), y'_{|[t_2,\infty)} = \mu', \tag{4.5}$$

$$\forall x' \in f(u^1), x'_{|[t_3,\infty)} = \mu''. \tag{4.6}$$

Cu notaţiile $d = t_1 - t_2$, $\widetilde{v} = v^0$ *şi*

$$\widetilde{u}_\varepsilon = u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1+\varepsilon)} \oplus (u^1 \circ \tau^{d+\varepsilon}) \cdot \chi_{[t_1+\varepsilon,\infty)}, \tag{4.7}$$

$\varepsilon \geq 0$, *avem*

$$\widetilde{u}_{\varepsilon|(-\infty,t_0)} = \widetilde{v}_{|(-\infty,t_0)}, \tag{4.8}$$

$$\forall \widetilde{y} \in f(\widetilde{v}), \widetilde{y}_{|[t_0,\infty)} = \mu, \tag{4.9}$$

$$\forall \widetilde{x} \in f(\widetilde{u}_\varepsilon), \widetilde{x}_{|[t_3+d+\varepsilon,\infty)} = \mu''. \tag{4.10}$$

Aceasta înseamnă că dacă $\mu \overset{u^0_{|[t_0,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$, $\mu' \overset{u^1_{|[t_2,t_3)}}{\rightarrow} \mu''$ *sunt transferuri fundamentale neiniţiale, atunci* $\mu \overset{\widetilde{u}_{\varepsilon|[t_0,t_3+d+\varepsilon)}}{\rightarrow} \mu''$ *e un transfer fundamental neiniţial (dacă* $f(u^0)$ *transferă în mod sincron valoarea finală* μ *în valoarea finală* μ' *şi dacă* $f(u^1)$ *transferă în mod sincron valoarea finală* μ' *în valoarea finală* μ'', *atunci* $f(\widetilde{u}_\varepsilon)$ *transferă în mod sincron valoarea finală* μ *în valoarea finală* μ''*).*

DEMONSTRAŢIE. b) Mai întâi să observăm că, datorită lui i), $\widetilde{u}_\varepsilon$ dat de (4.7) aparţine lui U.

Egalitatea (4.8) e satisfăcută deoarece pentru orice $\varepsilon \geq 0$, avem $t_1+\varepsilon \geq t_1 > t_0$ şi din definiţia lui $\widetilde{v}$, constatăm că

$$\widetilde{u}_{\varepsilon|(-\infty,t_0)} \overset{(4.7)}{=} u^0_{|(-\infty,t_0)} \overset{(4.1)}{=} v^0_{|(-\infty,t_0)} = \widetilde{v}_{|(-\infty,t_0)}.$$

Relaţia (4.9) e adevărată deoarece coincide cu ipoteza (4.2).

Demonstrăm (4.10). Din (4.4) şi din neanticipativitatea lui f deducem

$$\{y'_{|(-\infty,t_2]}|y' \in f(v^1)\} = \{x'_{|(-\infty,t_2]}|x' \in f(u^1)\}$$

şi ţinând cont de (4.5), vedem că

$$\{y'(t_2)|y' \in f(v^1)\} = \{x'(t_2)|x' \in f(u^1)\} = \mu'. \tag{4.11}$$

Invarianţa în timp a lui f implică

$$\{x''|x'' \in f(u^1 \circ \tau^{d+\varepsilon})\} = \{x' \circ \tau^{d+\varepsilon}|x' \in f(u^1)\},$$

deci

$$\{x'(t_2)|x' \in f(u^1)\} = \{x''(t_1+\varepsilon)|x'' \in f(u^1 \circ \tau^{d+\varepsilon})\}. \tag{4.12}$$

Din

$$\widetilde{u}_{\varepsilon|(-\infty,t_1+\varepsilon)} = u^0_{|(-\infty,t_1+\varepsilon)}$$

şi din neanticipativitate obţinem

$$\{\widetilde{x}_{|(-\infty,t_1+\varepsilon]}|\widetilde{x} \in f(\widetilde{u}_\varepsilon)\} = \{x_{|(-\infty,t_1+\varepsilon]}|x \in f(u^0)\}.$$

În particular, avem

$$\{\widetilde{x}(t_1+\varepsilon)|\widetilde{x} \in f(\widetilde{u}_\varepsilon)\} = \{x(t_1+\varepsilon)|x \in f(u^0)\}. \tag{4.13}$$

Atunci

$$\begin{aligned} \{\widetilde{x}(t_1+\varepsilon)|\widetilde{x} \in f(\widetilde{u}_\varepsilon)\} &\overset{(4.13)}{=} \{x(t_1+\varepsilon)|x \in f(u^0)\} \overset{(4.3)}{=} \mu' = \\ &\overset{(4.5)}{=} \{y'(t_2)|y' \in f(v^1)\} \overset{(4.11)}{=} \{x'(t_2)|x' \in f(u^1)\} = \\ &\overset{(4.12)}{=} \{x''(t_1+\varepsilon)|x'' \in f(u^1 \circ \tau^{d+\varepsilon})\}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Deoarece

$$\widetilde{u}_{\varepsilon|[t_1+\varepsilon,\infty)} = (u^1 \circ \tau^{d+\varepsilon})_{|[t_1+\varepsilon,\infty)}, \tag{4.15}$$

(4.14), (4.15) şi neanticipativitatea* lui f arată că

$$\{\widetilde{x}_{|[t_1+\varepsilon,\infty)}|\widetilde{x} \in f(\widetilde{u}_\varepsilon)\} = \{x''_{|[t_1+\varepsilon,\infty)}|x'' \in f(u^1 \circ \tau^{d+\varepsilon})\}. \tag{4.16}$$

Dar faptul că $t_3+d+\varepsilon > t_1+\varepsilon$ şi

$$\{x''_{|[t_1+\varepsilon,\infty)}|x'' \in f(u^1 \circ \tau^{d+\varepsilon})\} = \{(x' \circ \tau^{d+\varepsilon})_{|[t_1+\varepsilon,\infty)}|x' \in f(u^1)\} \tag{4.17}$$

indică adevărul lui

$$\begin{aligned} \{\widetilde{x}_{|[t_3+d+\varepsilon,\infty)}|\widetilde{x} \in f(\widetilde{u}_\varepsilon)\} &\overset{(4.16)}{=} \{x''_{|[t_3+d+\varepsilon,\infty)}|x'' \in f(u^1 \circ \tau^{d+\varepsilon})\} = \\ \overset{(4.17)}{=} \{(x' \circ \tau^{d+\varepsilon})_{|[t_3+d+\varepsilon,\infty)}|x' \in f(u^1)\} &= \{x'_{|[t_3,\infty)}|x' \in f(u^1)\} \overset{(4.6)}{=} \mu''. \end{aligned}$$

Aşadar (4.10) e demonstrată. □

DEFINITIE 92. *Folosim notaţiile din teorema anterioară şi presupunem că cerinţele formulate acolo sunt îndeplinite. Avem următoarea lege parţială de compunere a transferurilor fundamentale*

$$(\mu \overset{u^0_{|(-\infty,t_1)}}{\to} \mu') \vee (\mu' \overset{u^1_{|[t_2,t_3)}}{\to} \mu'') = \mu \overset{\widetilde{u}_{\varepsilon|(-\infty,t_3+d+\varepsilon)}}{\to} \mu'',$$

$$(\mu \overset{u^0_{|[t_0,t_1)}}{\to} \mu') \vee (\mu' \overset{u^1_{|[t_2,t_3)}}{\to} \mu'') = \mu \overset{\widetilde{u}_{\varepsilon|[t_0,t_3+d+\varepsilon)}}{\to} \mu''.$$

5. Un caz particular de compunere a transferurilor fundamentale

TEOREMĂ 233. *Să presupunem că sistemul f e neanticipativ. Următoarele cerinţe sunt adevărate:*

a) pentru orice $t_1 < t_2$, $u \in U$ şi $\mu, \mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n$, aşa încât transferurile $\mu \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\to} \mu'$, $\mu' \overset{u_{|[t_1,t_2)}}{\to} \mu''$ sunt fundamentale, transferul $\mu \overset{u_{|(-\infty,t_2)}}{\to} \mu''$ e fundamental;

b) luăm nişte $t_1 < t_2 < t_3$, $u \in U$ şi $\mu, \mu', \mu'' \in \mathbf{B}^n$ în mod arbitrar, aşa încât transferurile $\mu \overset{u_{|[t_1,t_2)}}{\to} \mu'$, $\mu' \overset{u_{|[t_2,t_3)}}{\to} \mu''$ să fie fundamentale. Atunci transferul $\mu \overset{u_{|[t_1,t_3)}}{\to} \mu''$ e fundamental.

DEMONSTRAŢIE. a) Prin ipoteză există $t_0 < t_1, v \in U$ şi $v' \in U$, aşa ca

$$u_{|(-\infty,t_1)} = v_{|(-\infty,t_1)}, \forall y \in f(v), y_{|(-\infty,t_0)} = \mu \; si \; y_{|[t_1,\infty)} = \mu',$$

$$u_{|(-\infty,t_2)} = v'_{|(-\infty,t_2)}, \forall y' \in f(v'), y'_{|[t_2,\infty)} = \mu''.$$

Deoarece $v_{|(-\infty,t_0)} = v'_{|(-\infty,t_0)}$, din neanticipativitatea lui f avem

$$\{y_{|(-\infty,t_0)} | y \in f(v)\} = \{y'_{|(-\infty,t_0)} | y' \in f(v')\} = \mu,$$

deci

$$u_{|(-\infty,t_2)} = v'_{|(-\infty,t_2)}, \forall y' \in f(v'), y'_{|(-\infty,t_0)} = \mu \; si \; y'_{|[t_2,\infty)} = \mu''$$

e adevărată, ceea ce înseamnă că transferul $\mu \overset{u_{|(-\infty,t_2)}}{\to} \mu''$ e fundamental.

b) e făcută în mod similar cu a). □

OBSERVATIE 88. *În condiţiile şi cu notaţiile din teorema precedentă, avem următoarea lege parţială de compunere a transferurilor fundamentale:*

$$(\mu \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\to} \mu') \vee (\mu' \overset{u_{|[t_1,t_2)}}{\to} \mu'') = \mu \overset{u_{|(-\infty,t_2)}}{\to} \mu'',$$

$$(\mu \overset{u_{|[t_1,t_2)}}{\to} \mu') \vee (\mu' \overset{u_{|[t_2,t_3)}}{\to} \mu'') = \mu \overset{u_{|[t_1,t_3)}}{\to} \mu''$$

reprezentând un caz particular al Definiţiei 92. Teorema 233 reafirmă rezultatele din Teorema 232 sub o formă simplificată. De exemplu în Teorema 232, a) avem $u^0 = u^1$. Pentru acest motiv cerinţele de închidere a lui U sub concatenarea intrărilor şi neanticipativitatea devin nenecesare. Deoarece $u^0 = u^1$ şi $t_1 = t_2$ cerinţele de închidere a lui U sub translaţii şi de invarianţă în timp dispar şi ele.*

6. Modul fundamental

TEOREMĂ 234. *Considerăm sistemul f presupus a fi neanticipativ şi fie $u \in U$ o intrare fixată. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) există $(t_k) \in Seq$, $(u^k) \in U$ şi $(\mu^k) \in \mathbf{B}^n$ aşa încât

$$\forall x \in f(u^0), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0 \text{ si } x_{|[t_1,\infty)} = \mu^1,$$

$$u_{|(-\infty,t_1)} = u^0_{|(-\infty,t_1)},\ u_{|(-\infty,t_2)} = u^1_{|(-\infty,t_2)},\ u_{|(-\infty,t_3)} = u^2_{|(-\infty,t_3)}, ...$$

$$\forall x \in f(u^1), x_{|[t_2,\infty)} = \mu^2,\ \forall x \in f(u^2), x_{|[t_3,\infty)} = \mu^3,\ \forall x \in f(u^3), x_{|[t_4,\infty)} = \mu^4, ...;$$

b) există $(t_k) \in Seq$ şi $(\mu^k) \in \mathbf{B}^n$ aşa încât transferurile $\mu^0 \xrightarrow{u_{|(-\infty,t_1)}} \mu^1$, $\mu^1 \xrightarrow{u_{|[t_1,t_2)}} \mu^2$, $\mu^2 \xrightarrow{u_{|[t_2,t_3)}} \mu^3$,... sunt fundamentale;

c) există $(t_k) \in Seq$ şi $(\mu^k) \in \mathbf{B}^n$ aşa încât transferurile $\mu^0 \xrightarrow{u_{|(-\infty,t_1)}} \mu^1$, $\mu^0 \xrightarrow{u_{|(-\infty,t_2)}} \mu^2$, $\mu^0 \xrightarrow{u_{|(-\infty,t_3)}} \mu^3, ...$ sunt fundamentale iniţiale.

DEMONSTRAŢIE. $a) \Longrightarrow b)$ Fie (t_k), (u^k) şi (μ^k) ca la punctul $a)$. Deoarece

$$u_{|(-\infty,t_1)} = u^0_{|(-\infty,t_1)},\ \forall x \in f(u^0), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0 \text{ si } x_{|[t_1,\infty)} = \mu^1 \tag{6.1}$$

e adevărată, $\mu^0 \xrightarrow{u_{|(-\infty,t_1)}} \mu^1$ e un transfer fundamental iniţial. Faptul că

$$u_{|(-\infty,t_1)} = u^0_{|(-\infty,t_1)},\ \forall x \in f(u^0), x_{|[t_1,\infty)} = \mu^1, \tag{6.2}$$

$$u_{|(-\infty,t_2)} = u^1_{|(-\infty,t_2)},\ \forall x \in f(u^1), x_{|[t_2,\infty)} = \mu^2 \tag{6.3}$$

ne face să deducem că transferul $\mu^1 \xrightarrow{u_{|[t_1,t_2)}} \mu^2$ e fundamental neiniţial etc.

$b) \Longrightarrow c)$ Există (t_k) şi (μ^k) aşa încât $\mu^0 \xrightarrow{u_{|(-\infty,t_1)}} \mu^1$, $\mu^1 \xrightarrow{u_{|[t_1,t_2)}} \mu^2$, $\mu^2 \xrightarrow{u_{|[t_2,t_3)}} \mu^3, ...$ sunt transferuri fundamentale. Ca în Teorema 233 şi în Definiţia 88

$$\mu^0 \overset{u_{|(-\infty,t_2)}}{\to} \mu^2 = (\mu^0 \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\to} \mu^1) \vee (\mu^1 \overset{u_{|[t_1,t_2)}}{\to} \mu^2),$$

$$\mu^0 \overset{u_{|(-\infty,t_3)}}{\to} \mu^3 = (\mu \overset{u_{|(-\infty_1,t_2)}}{\to} \mu^2) \vee (\mu^2 \overset{u_{|[t_2,t_3)}}{\to} \mu^3),$$

$$...$$

sunt fundamentale iniţiale.

$c) \Longrightarrow a)$ Considerăm şirurile (t_k) şi (μ^k) aşa ca la $c)$. Faptul că $\mu^0 \xrightarrow{u_{|(-\infty,t_1)}} \mu^1$ e transfer fundamental iniţial arată existenţa lui $u^0 \in U$ aşa încât (6.1) e adevărată şi deoarece $\mu^0 \xrightarrow{u_{|(-\infty,t_2)}} \mu^2$ e transfer fundamental iniţial, obţinem existenţa lui $u^1 \in U$, cu (6.3) adevărată etc. Are loc afirmaţia de la a). $\square$

DEFINITIE 93. *În cazul că una dintre precedentele proprietăţi a), b), c) din Teorema 234 e satisfăcută, intrarea u e numită* ***mod fundamental (de operare) (al lui** f**)***.

TEOREMĂ 235. *Dacă f e neanticipativ şi $t_0 < t_1, u \in U, \mu, \mu' \in \mathbf{B}^n$ sunt fixate, atunci din*

$$\forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu \text{ si } x_{|[t_1,\infty)} = \mu'$$

se deduce că u e un mod fundamental al lui f.

DEMONSTRAŢIE. Există şirurile $(t'_k) \in Seq$ şi $(\mu^k) \in \mathbf{B}^n$ astfel încât

$$t'_0 = t_0, t'_1 = t_1, t'_k, k \geq 2 \text{ arbitrare},$$

$$\mu^0 = \mu, \mu^1 = \mu^2 = ... = \mu'.$$

Observăm că $\mu \overset{u_{|(-\infty,t'_1)}}{\longrightarrow} \mu', \mu \overset{u_{|(-\infty,t'_2)}}{\longrightarrow} \mu', \mu \overset{u_{|(-\infty,t'_3)}}{\longrightarrow} \mu', ...$ sunt transferuri fundamentale iniţiale. $\square$

OBSERVATIE 89. *Evoluţia lui f sub modul fundamental u poate fi interpretată ca o evoluţie simbolică în timp discret a unui sistem determinist, de forma*

$$\mu^0 = x(0) \overset{u^0}{\rightarrow} \mu^1 = x(1) \overset{u^1}{\rightarrow} ... \overset{u^k}{\rightarrow} \mu^{k+1} = x(k+1) \overset{u^{k+1}}{\rightarrow} ...,$$

unde transferul fundamental iniţial $\mu^0 \overset{u^0_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} \mu^1$ e identificat cu transferul simbolic $x(0) \overset{u^0}{\rightarrow} x(1)$ şi un transfer fundamental neiniţial de rang $k \geq 1$, $\mu^k \overset{u^k_{|[t_k,t_{k+1})}}{\longrightarrow} \mu^{k+1}$ e identificat cu transferul simbolic $x(k) \overset{u^k}{\rightarrow} x(k+1)$.

În ipoteza Teoremei precedente, evoluţia simbolică poate fi considerată ca fiind dată de un şir finit

$$\mu^0 = x(0) \overset{u^0}{\rightarrow} \mu^1 = x(1) \overset{u^1}{\rightarrow} ... \overset{u^k}{\rightarrow} \mu^{k+1} = x(k+1),$$

unde k poate fi şi 0.

În plus: dacă intrarea $v \in U$ e un mod fundamental al lui f, atunci există o mulţime $V \subset U$ cu proprietatea că $v \in V$ (de exemplu $V = \{v\}$) şi $f_{|V}$ e tare sincron, i.e. satisface

$$\exists (t_k) \in Seq, \forall u \in V,$$

$$\exists (\mu^k) \in \mathbf{B}^n, \forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0 \text{ si } \forall k \geq 1, x(t_k) = \mu^k.$$

EXEMPLU 92. *În Exemplul 91 intrările u şi v sunt moduri fundamentale ale ambelor sisteme f, g.*

EXEMPLU 93. *Sistemul determinist $f : S \to S$,*

$$\forall u \in S,\ f(u) = \begin{cases} 1, u = \chi_{[0,1)\cup[2,3)\cup[4,5)\cup...} \\ 0, altfel \end{cases}$$

satisface următoarele proprietăţi: există $u = \chi_{[0,1)\cup[2,3)\cup[4,5)\cup...}$, şirul nemărginit $0 < 2 < 4 < ...$ de numere reale, familia

$$u^0 = \chi_{[0,1)},\ u^1 = \chi_{[0,1)\cup[2,3)},\ u^2 = \chi_{[0,1)\cup[2,3)\cup[4,5)}, ...$$

de intrări precum şi şirul binar nul $0_k \in \mathbf{B}, k \in \mathbf{N}$ aşa încât

$$f(u^0)_{|(-\infty,0)} = 0 \text{ si } f(u^0)_{|[2,\infty)} = 0,$$

$$u_{|(-\infty,2)} = u^0_{|(-\infty,2)},\ u_{|(-\infty,4)} = u^1_{|(-\infty,4)}, ...$$

$$f(u^1)_{|[4,\infty)} = 0,\ f(u^2)_{|[6,\infty)} = 0, ...$$

Afirmaţiile

$$f(u)_{|(-\infty,2]} = f(u^0)_{|(-\infty,2]},\ f(u)_{|(-\infty,4]} = f(u^1)_{|(-\infty,4]}, ...$$

sunt false, deoarece f e anticipativ. Aşadar u nu este un mod fundamental al lui f.

TEOREMĂ 236. *Fie u un mod fundamental al sistemului neanticipativ f. Există familiile $(t_k) \in Seq$ şi $(u^k) \in U$ aşa încât*

$$\forall k \in \mathbf{N}, u_{|(-\infty,t_{k+1})} = u^k_{|(-\infty,t_{k+1})}$$

şi toţi $u^k, k \in \mathbf{N}$ sunt moduri fundamentale ale lui f.

DEMONSTRAŢIE. Din Teorema 234, c) există $(t_k) \in Seq$ şi $(\mu^k) \in \mathbf{B}^n$ aşa încât transferurile $\mu^0 \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} \mu^1$, $\mu^0 \overset{u_{|(-\infty,t_2)}}{\longrightarrow} \mu^2$, $\mu^0 \overset{u_{|(-\infty,t_3)}}{\longrightarrow} \mu^3, ...$ sunt fundamentale iniţiale, i.e. există un şir $(u^k) \in U$ cu

$$\begin{gathered}
u_{|(-\infty,t_1)} = u^0_{|(-\infty,t_1)},\ \forall x \in f(u^0), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0 \text{ } si \text{ } x_{|[t_1,\infty)} = \mu^1, \\
u_{|(-\infty,t_2)} = u^1_{|(-\infty,t_2)},\ \forall x \in f(u^1), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0 \text{ } si \text{ } x_{|[t_2,\infty)} = \mu^2, \\
u_{|(-\infty,t_3)} = u^2_{|(-\infty,t_3)},\ \forall x \in f(u^2), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0 \text{ } si \text{ } x_{|[t_3,\infty)} = \mu^3, \\
...
\end{gathered}$$

Deci $\mu^0 \overset{u^0_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} \mu^1$, $\mu^0 \overset{u^1_{|(-\infty,t_2)}}{\longrightarrow} \mu^2$, $\mu^0 \overset{u^2_{|(-\infty,t_3)}}{\longrightarrow} \mu^3, ...$ sunt transferuri fundamentale iniţiale şi datorită Teoremei 235, obţinem că toţi $u^k, k \in \mathbf{N}$ sunt moduri fundamentale ale lui f. □

TEOREMĂ 237. *Fie sistemul neanticipativ f şi şirurile $(t_k) \in Seq$, $(u^k) \in U$, aşa încât următoarele proprietăţi să fie satisfăcute:*

a) pentru orice $v \in S^{(n)}$ şi pentru orice şiruri $(\xi_k) \in Seq$, $(v^k) \in U$, din

$$\forall k \in \mathbf{N}, v_{|(-\infty,\xi_{k+1})} = v^k_{|(-\infty,\xi_{k+1})}$$

deducem că $v \in U$;

b) $u^k, k \in \mathbf{N}$ sunt toate moduri fundamentale ale lui f;

c) avem

$$\forall k \in \mathbf{N}, u^k_{|(-\infty,t_{k+1})} = u^{k+1}_{|(-\infty,t_{k+1})}. \tag{6.4}$$

Atunci u definit de

$$\forall k \in \mathbf{N}, u_{|(-\infty,t_{k+1})} = u^k_{|(-\infty,t_{k+1})} \tag{6.5}$$

e un mod fundamental al lui f.

DEMONSTRAŢIE. Observăm că (6.4) ne permite să scriem (6.5) şi că, prin ipoteza a), această ultimă relaţie defineşte un unic u, care îi aparţine lui U. Demonstrăm că u e un mod fundamental al lui f.

Faptul că toate intrările u^k sunt moduri fundamentale ale lui f arată existenţa lui $(t^k_{k'})_{k'} \in Seq, (u^{kk'})_{k'} \in U$ şi $(\mu^{kk'})_{k'} \in \mathbf{B}^n$ aşa încât

$$\begin{gathered}
\forall x \in f(u^{k0}), x_{|(-\infty,t^k_0)} = \mu^{k0} \text{ si } x_{|[t^k_1,\infty)} = \mu^{k1}, \\
u^k_{|(-\infty,t^k_1)} = u^{k0}_{|(-\infty,t^k_1)}, u^k_{|(-\infty,t^k_2)} = u^{k1}_{|(-\infty,t^k_2)}, u^k_{|(-\infty,t^k_3)} = u^{k2}_{|(-\infty,t^k_3)}, ... \\
\forall x \in f(u^{k1}), x_{|[t^k_2,\infty)} = \mu^{k2}, \forall x \in f(u^{k2}), x_{|[t^k_3,\infty)} = \mu^{k3}, \\
\forall x \in f(u^{k3}), x_{|[t^k_4,\infty)} = \mu^{k4}, ...
\end{gathered}$$

Definim şirul $(t'_k) \in Seq$ prin

$$(t'_k) = \{t^{k_1}_{k_2} | k_1 \in \mathbf{N}, k_2 \in \mathbf{N}\}$$

şi fixăm asocierea $\mathbf{N} \ni k \mapsto (k_1, k_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ caracterizată de aceea că

$$\forall k \in \mathbf{N}, t'_k = t^{k_1}_{k_2}.$$

Această asociere, împreună cu cerinţa de neanticipativitate a lui f ne dau posibilitatea să definim

$$\forall k \in \mathbf{N}, u'^k = u^{k_1 k_2},$$
$$\forall k \in \mathbf{N}, \mu'^k = \mu^{k_1 k_2}.$$

Şirurile $(t'_k), (u'^k), (\mu'^k)$ îndeplinesc cerinţa a) a Teoremei 234. $\square$

7. O proprietate de existenţă

TEOREMĂ 238. *Fie sistemul neanticipativ f. Presupunem că următoarele cerinţe sunt îndeplinite:*

a) pentru orice $(t_k) \in Seq$ şi orice şir de intrări $(u^k) \in U$, avem $u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_0,t_1)} \oplus u^2 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus ... \in U$[4]*;*

b) f satisface următoarea proprietate de iniţializare fără curse cu timp iniţial mărginit:

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu;$$

c) f e absolut stabil fără curse cu timp final mărginit, i.e.

$$\forall u \in U, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|[t_1,\infty)} = \mu'.$$

Atunci, pentru orice şir de intrări $(u^k) \in U$, există momentele de timp $(t_k) \in Seq$ aşa încât intrarea

$$\widetilde{u} = u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus ... \oplus u^k \cdot \chi_{[t_k,t_{k+1})} \oplus ...$$

e un mod fundamental al lui f.

DEMONSTRAŢIE. Considerăm numărul real $\delta > 0$ şi şirul de intrări $(u^k) \in U$, ambele arbitrare. Din b) deducem existenţa lui $\mu^0 \in \mathbf{B}^n$ şi $t_0 \in \mathbf{R}$, aşa încât

$$\forall x \in f(u^0), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0,$$

în timp ce din c) avem existenţa lui $\mu^1 \in \mathbf{B}^n$ şi $t_1 \in \mathbf{R}$ cu $t_1 > t_0 + \delta$ astfel ca

$$\forall x \in f(u^0), x_{|[t_1,\infty)} = \mu^1.$$

Mai departe, din a) avem că $u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_1,\infty)} \in U$, iar din c) se deduce existenţa lui $\mu^2 \in \mathbf{B}^n$ şi $t_2 \in \mathbf{R}$, aşa încât $t_2 > t_1 + \delta$ şi

$$\forall x \in f(u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_1,\infty)}), x_{|[t_2,\infty)} = \mu^2$$

să aibe loc. Construcţia lui (t_k) şi faptul că $(t_k) \in Seq$ sunt evidente. Pe de altă parte, luând în considerare a), $\widetilde{u}$ obţinut în acest fel îi aparţine lui U. Afirmaţia că $\widetilde{u}$ e un mod fundamental al lui f se deduce din egalităţile

$$\widetilde{u}_{|(-\infty,t_1)} = u^0_{|(-\infty,t_1)}, \widetilde{u}_{|(-\infty,t_2)} = (u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_1,\infty)})_{|(-\infty,t_2)}, ...$$

$\square$

OBSERVATIE 90. *Teorema precedentă arată că în anumite circumstanţe legate de f, pentru orice şir $(u^k) \in U$, dacă t_1 e suficient de mare, sistemul se stabilizează cu toate stările de la t_1 începând şi $(x(-\infty+0) \overset{\widetilde{u}_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} x(t_1)) = (x(-\infty+0) \overset{u^0_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} x(t_1))$ e transfer fundamental iniţial şi nu depinde de alegerea lui $x \in f(\widetilde{u})$. Mai*

[4]Proprietăţile de închidere ale lui U din Teorema 237, a) şi Teorema 238, a) sunt echivalente şi se numesc **safety**.

mult, pentru orice k şi orice moment al timpului t_k, dacă lăsăm pe u^k să participe suficient de mult timp la construcţia lui $\widetilde{u}$,

$$\widetilde{u}_{|[t_k,t_{k+1})} = u^k_{|[t_k,t_{k+1})},$$

i.e. dacă t_{k+1} e suficient de mare, atunci sistemul se stabilizează cu toate stările de la t_{k+1} începând iar transferul $(x(t_k) \overset{\widetilde{u}_{|[t_k,t_{k+1})}}{\longrightarrow} x(t_{k+1})) = (x(t_k) \overset{u^k_{|[t_k,t_{k+1})}}{\longrightarrow} x(t_{k+1}))$ e fundamental neiniţial şi nu depinde de alegerea lui $x \in f(\widetilde{u})$.

EXEMPLU 94. *Dăm câteva exemple de mulţimi U care satisfac cerinţa a) a Teoremei 238.*

i) $U = \{\lambda\}$, unde $\lambda \in \mathbf{B}^m$. Identificăm din nou constanta cu funcţia constantă. Mulţimea U are acea proprietate deoarece pentru orice şir nemărginit $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ şi orice $(u^k) \in U$, avem $u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_0,t_1)} \oplus u^2 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus ... = \lambda$.

ii) Exemplul anterior e generalizat în următorul fel. Fie $H \subset \mathbf{B}^m$ o mulţime nevidă. Mulţimea $U \subset S^{(m)}$, definită de

$$U = \{u| \text{ există } (\lambda^k) \in H \text{şi } (t_k) \in Seq$$

$$\text{aşa încât } u = \lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_0,t_1)} \oplus \lambda^2 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus ...\}$$

are proprietatea cerută. În particular, pentru $H = \mathbf{B}^m$, obţinem mulţimea $U = S^{(m)}$.

iii) Luăm o mulţime nevidă $V \subset S^{(m)}$, pentru care

$$U = \{u| \text{ există } (u^k) \in V \text{şi } (t_k) \in Seq$$

$$\text{aşa încât } u = u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_0,t_1)} \oplus u^2 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus ...\}.$$

Mulţimea U are proprietatea a) din Teorema 238.

TEOREMĂ 239. *Dacă sistemul neanticipativ f satisface următoarele proprietăţi:*

a) iniţializare fără curse cu timp iniţial mărginit

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu,$$

b) stabilitate absolută fără curse cu timp final mărginit

$$\forall u \in U, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|[t_1,\infty)} = \mu'$$

atunci

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \exists t_1 > t_0,$$

$$\forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu \text{ si } x_{|[t_1,\infty)} = \mu',$$

i.e. pentru orice u, există nişte μ, μ' şi $t_0 < t_1$ aşa încât $\mu \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\rightarrow} \mu'$ e un transfer fundamental iniţial.

DEMONSTRAŢIE. Rezultă din prima parte a demonstraţiei Teoremei 238, în care $u^0 = u$. □

TEOREMĂ 240. *Presupunem că sistemul neanticipativ f e absolut stabil fără curse cu timp final mărginit, i.e.*

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|[t,\infty)} = \mu.$$

Atunci $\forall u \in U$, există vectorii $\mu, \mu' \in \mathbf{B}^n$ şi numerele $t_0 < t_1$ aşa încât transferul $\mu \overset{u_{|[t_0,t_1)}}{\longrightarrow} \mu'$ e fundamental neiniţial.

DEMONSTRAŢIE. E suficient să considerăm proprietatea: pentru orice $u \in U$, există μ şi t_0 aşa încât $\forall x \in f(u), x_{|[t_0,\infty)} = \mu$; atunci $\mu' = \mu$ şi $t_1 > t_0$ arbitrare fac ca concluzia teoremei să fie îndeplinită. $\square$

8. Modul fundamental, caz particular

DEFINITIE 94. *Pentru orice $t_1 \in \mathbf{R}$, **prefixul** lui $u \in S^{(m)}$ e funcţia $u_{t_1} \in S^{(m)}$ dată de*

$$u_{t_1}(t) = \begin{cases} u(t), t < t_1 \\ u(t_1 - 0), t \geq t_1 \end{cases}.$$

TEOREMĂ 241. *Fie f un sistem neanticipativ şi fie intrarea $u \in U$. Pentru orice $(t_k) \in Seq$ şi $(\mu^k) \in \mathbf{B}^n$ aşa încât $u_{t_1}, u_{t_2}, u_{t_3}, ... \in U$ şi*

$$\forall x \in f(u_{t_1}), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0 \ si \ x_{|[t_1,\infty)} = \mu^1$$

$$\forall x \in f(u_{t_2}), x_{|[t_2,\infty)} = \mu^2, \ \forall x \in f(u_{t_3}), x_{|[t_3,\infty)} = \mu^3, \ \forall x \in f(u_{t_4}), x_{|[t_4,\infty)} = \mu^4, ...$$

u e un mod fundamental al lui f.

DEMONSTRAŢIE. Definim şirul $(u^k) \in U$ prin $u^k = u_{t_{k+1}}, k \in \mathbf{N}$. Deoarece pentru orice $k \geq 0$, avem $u_{|(-\infty,t_{k+1})} = u^k_{|(-\infty,t_{k+1})}$, afirmaţia Teoremei 234, a) e adevărată. $\square$

COROLAR 2. *Se dă sistemul neanticipativ f şi fie o intrare $u \in U$ a sa. Dacă şirurile $(t_k) \in Seq$, $(\mu^k) \in \mathbf{B}^n$ şi $(\lambda^k) \in \mathbf{B}^m$ satisfac*

$$u(t) = \lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)}(t) \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus \lambda^2 \cdot \chi_{[t_2,t_3)}(t) \oplus ...$$

$$\lambda^0, \lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,\infty)}, \lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus \lambda^2 \cdot \chi_{[t_2,\infty)}, ... \in U \ şi$$

$$\forall x \in f(\lambda^0), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0 \ si \ x_{|[t_1,\infty)} = \mu^1,$$

$$\forall x \in f(\lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,\infty)}), x_{|[t_2,\infty)} = \mu^2,$$

$$\forall x \in f(\lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus \lambda^2 \cdot \chi_{[t_2,\infty)}), x_{|[t_3,\infty)} = \mu^3,$$

$$...$$

atunci u e un mod fundamental al lui f.

DEMONSTRAŢIE. Acesta e un caz particular al teoremei anterioare, anume acela când $u_{t_1} = \lambda^0$, $u_{t_2} = \lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,\infty)}$, $u_{t_3} = \lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus \lambda^2 \cdot \chi_{[t_2,\infty)}, ...$ $\square$

OBSERVATIE 91. *Teorema 241 dă o nouă perspectivă asupra modului fundamental: $\forall k \geq 1$, stabilizarea lui x la valoarea $x(t_k)$ e o consecinţă directă a faptului că, înainte de t_k, u s-a stabilizat la valoarea $u(t_k - 0)$. Deci la momentele de timp $t_1, t_2, t_3, ...$, u şi toţi $x \in f(u)$ sunt în echilibru*

$$\forall k \geq 1, \forall t \geq t_k, u_{t_k}(t) = u(t_k - 0) \ si \ \forall x \in f(u_{t_k}), x(t) = x(t_k)$$

şi considerăm echilibrul ca având loc inclusiv la momentul de timp t_0 sub forma

$$\forall t < t_0, u(t) = u(t_0 - 0) \ si \ \forall x \in f(u_{t_1}), x(t) = x(t_0 - 0)$$

printr-o alegere corespunzătoare a lui t_0.

Situaţia descrisă în Teorema 241 include posibilităţile $\exists k \geq 1, u_{t_k} = u_{t_{k+1}}$ şi respectiv $\exists k \geq 1, u = u_{t_k}$.

Corolarul 2 reprezintă acel caz particular al Teoremei 241, când u e constant în intervalele $(-\infty, t_1)$, $[t_1, t_2)$, $[t_2, t_3), ...$

Următoarea teoremă e o adaptare a Teoremei 238 la contextul prezent.

TEOREMĂ 242. *Se dă sistemul neanticipativ f şi fie mulţimea nevidă $H \subset \mathbf{B}^m$. Dacă*

a) $U = \{\lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus \lambda^2 \cdot \chi_{[t_2,t_3)} \oplus ...|(\lambda^k) \in H, (t_k) \in Seq\}$;

b) f are stări iniţiale fără curse cu timp iniţial mărginit

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu;$$

c) f e relativ stabil fără curse cu timp final mărginit

$$\forall u \in U \cap S_c^{(m)}, \exists \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|[t_1,\infty)} = \mu',$$

atunci pentru orice $(\lambda^k) \in H$, există momentele de timp $(t_k) \in Seq$ aşa încât intrarea

$$u = \lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus \lambda^2 \cdot \chi_{[t_2,t_3)} \oplus ...$$

e un mod fundamental al lui f.

DEMONSTRAŢIE. Remarcăm doar că proprietatea de închidere din Teorema 238, a) e îndeplinită şi că $\lambda^0, \lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,\infty)}, \lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus \lambda^2 \cdot \chi_{[t_2,\infty)}, ... \in U \cap S_c^{(m)}$, pentru orice $(\lambda^k) \in H$ şi orice $(t_k) \in Seq$. Demonstraţia e similară cu aceea a Teoremei 238. □

9. Accesibilitatea şi modul fundamental

TEOREMĂ 243. *Fie sistemul neanticipativ $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ şi presupunem că următoarele cerinţe sunt îndeplinite:*

a) pentru orice $(t_k) \in Seq$ şi orice $(u^k) \in U$, avem $u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_0,t_1)} \oplus u^2 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus ... \in U$;

b) f are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial mărginit, i.e.

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t)} = \mu;$$

c) orice vector din $\mathbf{B}^n$ e o stare finală sub o intrare cu segment iniţial arbitrar

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall t \in \mathbf{R}, \exists v \in U, \exists t' > t,$$

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \text{ si } \forall y \in f(v), y_{|[t',\infty)} = \mu.$$

Atunci există un $\mu^0 \in \mathbf{B}^n$ aşa încât pentru orice şir de vectori $\mu^k \in \mathbf{B}^n, k \geq 1$, există un şir $(t_k) \in Seq$ şi o intrare $\widetilde{u} \in U$ aşa încât $\mu^0 \overset{\widetilde{u}_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} \mu^1$, $\mu^1 \overset{\widetilde{u}_{|[t_1,t_2)}}{\longrightarrow} \mu^2$, $\mu^2 \overset{\widetilde{u}_{|[t_2,t_3)}}{\longrightarrow} \mu^3, ...$ sunt transferuri fundamentale.

DEMONSTRAŢIE. Fie $v^0 \in U$ o intrare arbitrară. Din b) avem existenţa lui $\mu^0 \in \mathbf{B}^n$ şi $t_0 \in \mathbf{R}$ care depind de v^0, aşa încât

$$\forall x \in f(v^0), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0. \tag{9.1}$$

Să fixăm şirul $\mu^k \in \mathbf{B}^n, k \geq 1$ şi un număr arbitrar $\delta > 0$. În acest moment proprietatea c) implică existenţa lui $u^0 \in U$ şi $t_1 > t_0 + \delta$ aşa încât

$$v^0_{|(-\infty,t_0)} = u^0_{|(-\infty,t_0)} \text{ si } \forall x \in f(u^0), x_{|[t_1,\infty)} = \mu^1,$$

a lui $u^1 \in U$ şi $t_2 > t_1 + \delta$ aşa încât

$$u^0_{|(-\infty,t_1)} = u^1_{|(-\infty,t_1)} \text{ si } \forall x \in f(u^1), x_{|[t_2,\infty)} = \mu^2,$$

a lui $u^2 \in U$ şi $t_3 > t_2 + \delta$ aşa încât

$$u^1_{|(-\infty,t_2)} = u^2_{|(-\infty,t_2)} \text{ si } \forall x \in f(u^2), x_{|[t_3,\infty)} = \mu^3,$$

$$...$$

În mod evident, transferurile $\mu^0 \overset{u^0_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} \mu^1$, $\mu^1 \overset{u^1_{|[t_1,t_2)}}{\longrightarrow} \mu^2$, $\mu^2 \overset{u^2_{|[t_2,t_3)}}{\longrightarrow} \mu^3, ...$ sunt fundamentale.

Modul în care (t_k) a fost construit garantează faptul că acest şir îi aparţine lui Seq. Aşadar, din a), intrarea $\widetilde{u}$ definită prin

$$\widetilde{u} = u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus u^2 \cdot \chi_{[t_2,t_3)} \oplus ...$$

aparţine lui U. Avem

$$\widetilde{u}_{|(-\infty,t_1)} = u^0_{|(-\infty,t_1)}, \ \widetilde{u}_{|(-\infty,t_2)} = u^1_{|(-\infty,t_2)}, \ \widetilde{u}_{|(-\infty,t_3)} = u^2_{|(-\infty,t_3)}, ...$$

de unde deducem că transferurile $\mu^0 \overset{\widetilde{u}_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} \mu^1$, $\mu^1 \overset{\widetilde{u}_{|[t_1,t_2)}}{\longrightarrow} \mu^2$, $\mu^2 \overset{\widetilde{u}_{|[t_2,t_3)}}{\longrightarrow} \mu^3, ...$ egale cu $\mu^0 \overset{u^0_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} \mu^1$, $\mu^1 \overset{u^1_{|[t_1,t_2)}}{\longrightarrow} \mu^2$, $\mu^2 \overset{u^2_{|[t_2,t_3)}}{\longrightarrow} \mu^3, ...$ (vezi Teorema 231) sunt fundamentale. □

TEOREMĂ 244. *Se dă sistemul neanticipativ $f : U \to P^*(S^{(n)})$ şi presupunem că următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

a) pentru orice $(t_k) \in Seq$ şi orice şir de intrări $(u^k) \in U$ avem $u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_0,t_1)} \oplus u^2 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus ... \in U$;

b) f are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial mărginit

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t)} = \mu;$$

c) vectorii din $\mathbf{B}^n$ sunt stări finale accesibile sub forma

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall t \in \mathbf{R}, \exists \lambda \in U, \exists t' > t,$$

$$\forall y \in f(u \cdot \chi_{(-\infty,t)} \oplus \lambda \cdot \chi_{[t,\infty)}), y_{|[t',\infty)} = \mu$$

(am identificat $\lambda \in \mathbf{B}^m$ cu intrarea constantă $\lambda \in U$). Atunci există $\mu^0 \in \mathbf{B}^n$ aşa încât pentru orice şir de vectori binari $\mu^k \in \mathbf{B}^n, k \geq 1$, există momentele de timp $(t_k) \in Seq$ şi constantele $(\lambda^k) \in \mathbf{B}^m$ având proprietatea că $\mu^0 \overset{\widetilde{u}_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} \mu^1$, $\mu^1 \overset{\widetilde{u}_{|[t_1,t_2)}}{\longrightarrow} \mu^2$, $\mu^2 \overset{\widetilde{u}_{|[t_2,t_3)}}{\longrightarrow} \mu^3, ...$ sunt transferuri fundamentale; am notat

$$\widetilde{u} = \lambda^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus \lambda^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus \lambda^2 \cdot \chi_{[t_2,t_3)} \oplus ...$$

DEMONSTRAŢIE. Caz particular al Teoremei 243. □

TEOREMĂ 245. *Fie dat sistemul neanticipativ f aşa încât*

a) pentru orice $(t_k) \in Seq$ şi orice $(u^k) \in U$, avem $u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_0,t_1)} \oplus u^2 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus ... \in U$;

b) f are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial mărginit

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t)} = \mu;$$

c) f are stări finale accesibile şi timp final mărginit sub forma

$$\exists \delta > 0, \forall \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall t \in \mathbf{R}, \exists v \in U, \exists t' \in (t, t+\delta),$$

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \text{ si } \forall y \in f(v), y_{|[t',\infty)} = \mu.$$

Atunci există $\delta > 0$ *şi* $\mu^0 \in \mathbf{B}^n$ *aşa încât pentru orice şir* $\mu^k \in \mathbf{B}^n, k \geq 1$, *avem existenţa lui* $t_0 \in \mathbf{R}$ *şi a lui* $\widetilde{u} \in U$ *cu proprietatea că* $\mu^0 \overset{\widetilde{u}_{|(-\infty,t_0+\delta)}}{\longrightarrow} \mu^1$, $\mu^1 \overset{\widetilde{u}_{|[t_0+\delta,t_0+2\delta)}}{\longrightarrow} \mu^2$, $\mu^2 \overset{\widetilde{u}_{|[t_0+2\delta,t_0+3\delta)}}{\longrightarrow} \mu^3, \ldots$ *sunt transferuri fundamentale.*

Demonstraţie. Similară cu aceea a Teoremei 243. □

Teoremă 246. *Sistemul neanticipativ* f *satisface proprietăţile următoare:*
a) f *are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial mărginit*

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t)} = \mu;$$

b) vectorii din $\mathbf{B}^n$ *sunt stări finale accesibile*

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|[t,\infty)} = \mu.$$

Atunci

$$\forall \mu' \in \mathbf{B}^n, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \exists t_1 > t_0,$$
$$\forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu \text{ si } x_{|[t_1,\infty)} = \mu'$$

i.e. pentru orice μ', *avem existenţa lui* μ, u, t_0 *şi* $t_1 > t_0$ *aşa încât* $\mu \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} \mu'$ *e un transfer fundamental iniţial.*

Demonstraţie. Fie $\mu' \in \mathbf{B}^n$ arbitrar, fixat. Punctul *b)* arată existenţa lui $u \in U$ şi $t_1 \in \mathbf{R}$ aşa încât

$$\forall x \in f(u), x_{|[t_1,\infty)} = \mu'.$$

Datorită punctului a), deducem existenţa lui $\mu \in \mathbf{B}^n$ şi a lui $t_0 \in \mathbf{R}$ care poate fi ales $< t_1$ cu

$$\forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu.$$

□

Observatie 92. *În teoremele acestei secţiuni au apărut următoarele proprietăţi de accesibilitate:*

a) orice vector din $\mathbf{B}^n$ *e stare finală sub o intrare cu segment iniţial arbitrar*

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall t \in \mathbf{R}, \exists v \in U, \exists t' > t,$$
$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \text{ si } \forall y \in f(v), y_{|[t',\infty)} = \mu;$$

b) versiune a lui a) în care accesul la o stare finală e făcut sub o intrare constantă

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall t \in \mathbf{R}, \exists \lambda \in U, \exists t' > t,$$
$$\forall y \in f(u \cdot \chi_{(-\infty,t)} \oplus \lambda \cdot \chi_{[t,\infty)}), y_{|[t',\infty)} = \mu;$$

c) versiune a lui a) în care accesul în starea finală se face sub forma

$$\exists \delta > 0, \forall \mu \in \mathbf{B}^n, \forall u \in U, \forall t \in \mathbf{R}, \exists v \in U, \exists t' \in (t, t+\delta),$$
$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \text{ si } \forall y \in f(v), y_{|[t',\infty)} = \mu;$$

d) versiune a lui a) în care intrările sub care vectorii din $\mathbf{B}^n$ *sunt stări finale nu au un segment iniţial arbitrar*

$$\forall \mu \in \mathbf{B}^n, \exists u \in U, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|[t,\infty)} = \mu.$$

Avem implicaţiile

$$\begin{array}{ccccc} b) & \Longrightarrow & a) & \Longrightarrow & d) \\ & & \Uparrow & & \\ & & c) & & \end{array}$$

10. Modul fundamental relativ la o funcţie

DEFINITIE 95. *Fie sistemul* $f : U \to P^*(S^{(n)}), U \in P^*(S^{(m)})$ *şi funcţia Booleană* $F : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}^n$. *Dacă e îndeplinită următoarea proprietate:* $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall u \in U$, $\forall v \in U$,

$$\forall \xi < t, F(u(\xi)) = F(v(\xi)) \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\}$$

atunci spunem că f *e* ***neanticipativ relativ la funcţia*** F.

TEOREMĂ 247. *Fie* f, F *definite ca mai înainte şi considerăm următoarele afirmaţii:*
i) f *e neanticipativ (în sensul Definiţiei 64);*
ii) f *e neanticipativ relativ la* F;
iii) f *e un sistem autonom.*
Atunci:
a) au loc implicaţiile iii)$\Longrightarrow$ii)$\Longrightarrow$i);
b) dacă F *e injectiv, atunci are loc i)$\Longrightarrow$ii);*
c) dacă $F = \mu$ *e funcţia constantă,* $\mu \in \mathbf{B}^n$, *atunci avem ii)$\Longrightarrow$iii).*

DEMONSTRAŢIE. a) Presupunem că $f = X$ e autonom, $X \in P^*(S^{(n)})$. Obţinem că $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U$,

$$\{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{x'_{|(-\infty,t]} | x' \in X\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\}$$

reprezintă concluzia implicaţiei ii), deci iii)$\Longrightarrow$ii). Mai departe, fixăm în mod arbitrar t, u, v aşa încât

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)}, \tag{10.1}$$

$$F(u(\cdot))_{|(-\infty,t)} = F(v(\cdot))_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \tag{10.2}$$
$$\Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\}.$$

Din (10.1) deducem

$$F(u(\cdot))_{|(-\infty,t)} = F(v(\cdot))_{|(-\infty,t)}, \tag{10.3}$$

deci, din (10.2), obţinem

$$\{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\}. \tag{10.4}$$

În acest fel a rezultat că implicaţia ii)$\Longrightarrow$i) e adevărată.

b) Fie $t \in \mathbf{R}, u \in U, v \in U$ arbitrare cu proprietatea că

$$u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)} \Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f(v)\} \tag{10.5}$$

şi (10.3) sunt adevărate. Presupunem de asemenea că F e injectivă. Din (10.3) şi din injectivitatea lui F se deduce (10.1) şi, ţinând cont de (10.5), avem că (10.4) e şi ea adevărată. i) a implicat ii).

c) Fie $t \in \mathbf{R}, u \in U, v \in U$ arbitrare aşa încât are loc (10.2). Atunci ecuaţia (10.3) e adevărată de asemenea, din faptul că F e constantă. Concluzia lui (10.2) e adevărată, deci (10.4) e adevărată. Deoarece t, u, v au fost arbitrare, am obţinut că $\forall u \in U, \forall v \in U, f(u) = f(v)$, deci f e un sistem autonom. □

DEFINITIE 96. *Presupunem că sistemul* f *e neanticipativ relativ la funcţia* F *şi fie* $u \in U$ *aşa încât există* $(t_k) \in Seq$, $(u^k) \in U$ *şi* $\mu^0 \in \mathbf{B}^n$ *care satisfac proprietăţile*

$$\forall x \in f(u^0), x_{|(-\infty,t_0)} = \mu^0 \text{ si } x_{|[t_1,\infty)} = F(u(t_1 - 0)),$$

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall \xi \in \mathbf{R}, F(u^k(\xi)) = \begin{cases} F(u(\xi)), \xi < t_{k+1} \\ F(u(t_{k+1}-0)), \xi \geq t_{k+1} \end{cases},$$

$$\forall k \geq 1, \forall x \in f(u^k), x_{|[t_{k+1},\infty)} = F(u(t_{k+1}-0)).$$

Atunci spunem că intrarea u e un ***mod fundamental (de operare) (al lui** f**) relativ la*** F.

OBSERVATIE 93. *Fie funcţia $u \in U$ şi numărul $t \in \mathbf{R}$. Observăm că funcţiile $v \in U$ care au proprietatea că*

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, F(v(\xi)) = \begin{cases} F(u(\xi)), \xi < t \\ F(u(t-0)), \xi \geq t \end{cases}$$

acţionează aici ca prefixe ale lui u. Cu alte cuvinte, v e prefixul lui u relativ la F. Definiţia 96 urmăreşte ideea din Teorema 241, în care $\mu^k = F(u(t_k - 0)), k \geq 1$ Remarcăm că acei u^k care sunt egali cu $u_{t_{k+1}}, k \in \mathbf{N}$ devin aici prefixe ale lui u relativ la F.

În general, faptul că u e un mod fundamental al lui f relativ la F constă în neanticipativitatea lui f relativă la F şi în existenţa lui $(t_k) \in Seq, \mu^0 \in \mathbf{B}^n$, aşa încât $\mu^0 \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} F(u(t_1-0))$, $F(u(t_1-0)) \overset{u_{|[t_1,t_2)}}{\longrightarrow} F(u(t_2-0))$, $F(u(t_2-0)) \overset{u_{|[t_2,t_3)}}{\longrightarrow} F(u(t_3-0))$,... sunt transferuri fundamentale.

Avem cazul particular când F e injectivă şi (Teorema 247) neanticipativitatea lui f relativă la F coincide cu neanticipativitatea lui f.

Un alt caz particular e acela când $F = \mu$ e funcţia constantă; atunci (din Teorema 247) f e autonom şi există $(t_k) \in Seq, \mu^0 \in \mathbf{B}^n$ aşa încât $\mu^0 \overset{u_{|(-\infty,t_1)}}{\longrightarrow} \mu$, $\mu \overset{u_{|[t_1,t_2)}}{\longrightarrow} \mu$, $\mu \overset{u_{|[t_2,t_3)}}{\longrightarrow} \mu$,... sunt transferuri fundamentale pentru orice $u \in U$.

Formulăm acum versiunea Teoremei 238 care e validă în acest context.

TEOREMĂ 248. *Fie funcţia F şi sistemul f neanticipativ relativ la F. Presupunem că următoarele proprietăţi sunt îndeplinite:*

a) pentru orice $(t_k) \in Seq$ şi orice şir de intrări $(u^k) \in U$, avem $u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_0,t_1)} \oplus u^2 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus ... \in U$;

b) iniţializare fără curse cu timp iniţial mărginit

$$\forall u \in U, \exists \mu \in \mathbf{B}^n, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|(-\infty,t)} = \mu;$$

c) stbilitate fără curse relativă la F cu timp final mărginit

$$\forall u \in U \cap S^{(m)}_{F,c}, \exists t \in \mathbf{R}, \forall x \in f(u), x_{|[t,\infty)} = \lim_{\xi\to\infty} F(u(\xi)).$$

Atunci pentru orice şir de intrări $(u^k) \in U \cap S^{(m)}_{F,c}$, există momentele de timp $(t_k) \in Seq$ aşa încât intrarea

$$\widetilde{u} = u^0 \cdot \chi_{(-\infty,t_1)} \oplus u^1 \cdot \chi_{[t_1,t_2)} \oplus ... \oplus u^k \cdot \chi_{[t_k,t_{k+1})} \oplus ...$$

să fie un mod fundamental al lui f relativ la F.

Partea 2

Teoria întârzierilor

CAPITOLUL 10

Întârzieri

Întârzierile sunt sistemele asincrone $f : S \to P^*(S)$ care au proprietatea de stabilitate fără curse relativă la identitatea $1_{\mathbf{B}} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$. Ele reprezintă modelele matematice ale circuitelor de întârziere. Teoria întârzierilor e teoria matematică în care circuitul de întârziere e considerat ca circuitul fundamental al electronicii digitale, iar modelarea e făcută prin utilizarea întârzierilor şi a funcţiilor Booleene. În timp ce teoria sistemelor asincrone dă modele la un nivel sintetic, cu blocuri funcţionale, aici se consideră nivelul cel mai de detaliu al modelării, care porneşte de la întârzierile apărute în porţi şi în fire. Capitolul trece în revistă descrierea neformalizată făcută în mod tradiţional întârzierilor, apoi se dau principalele definiţii şi câteva exemple.

1. Introducere. Circuitul de întârziere

Observatie 94. *Deoarece în teoria întârzierilor circuitul fundamental al electronicii digitale e considerat circuitul (sau elementul) de întârziere, scopul acestei introduceri e acela de a da câteva explicaţii informale despre acest circuit.*

Circuitul de întârziere e circuitul care calculează identitatea $1_{\mathbf{B}} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$. *Fie* $f : S \to P^*(S)$ *un sistem care îl modelează. Cu identificarea uzuală dintre model şi circuitul modelat,* $u \in S$ *e numit* ***intrarea*** *circuitului şi orice* $x \in f(u)$ *e numit* ***starea*** *sa (**posibilă**).*

De observat că fiecare semnal 1-dimensional e o intrare admisibilă pentru circuitul de întârziere şi din acest motiv atributul 'admisibilă' dat intrarii e în general omis. Faptul că toate semnalele sunt intrări admisibile nu înseamnă în mod necesar că inginerul care manevrează circuitul are posibilitatea de a utiliza orice semnal ca intrare, ci mai degrabă că circuitul are capacitatea de a răspunde oricărui semnal aplicat la intrare.

Se dau parametrii reali $0 < d_{r,\min} \le d_{r,\max}$, $0 < d_{f,\min} \le d_{f,\max}$, *la care semnificaţia indicilor 'r' şi 'f' e aceea de 'raise' (în traducere 'ridicare', comutarea unui semnal de pe* 0 *pe* 1*) şi 'fall' (în traducere 'cădere', comutarea unui semnal de pe* 1 *pe* 0*).*

Analiza noastră porneşte de la afirmţia că

$$\forall x \in f(0), x = 0,$$

i.e. 0 *e un punct de echilibru al lui* f *sub intrarea nulă.*

Intrarea care satisface $u_{|(-\infty,t_0)} = 0$ *comută la momentul de timp* t_0 *de la* 0 *la* 1 *şi fie* $t_1 > t_0$ *cu proprietatea*

$$\forall \xi \in [t_0, t_1), u(\xi) = 1.$$

Stările sistemului nu comută simultan cu intrarea

$$\forall x \in f(u), x(t_0) = 0.$$

Să ne aruncăm o privire la valorile pe care le iau funcţiile $x \in f(u)$ *la momentul de timp* t_1*.*

a) $0 < t_1 - t_0 < d_{r,\min}$; *în* t_1, *starea circuitului e în mod necesar nulă:*

$$t_0 < t_1 < t_0 + d_{r,\min} \text{ } si \text{ } \forall x \in f(u), x(t_1) = 0.$$

Interpretarea e aceea că inerţia circuitului nu a permis ca o aşa de rapidă comutare a stării de la 0 *la* 1 *să aibe loc.*

b) $d_{r,\min} \leq t_1 - t_0 < d_{r,\max}$*; în* t_1, *starea circuitului poate fi* 0 *sau* 1 :

$$t_0 + d_{r,\min} \leq t_1 < t_0 + d_{r,\max} \text{ } si \text{ } \exists x \in f(u), x(t_1) = 0 \text{ } si \text{ } \exists x \in f(u), x(t_1) = 1.$$

O incertitudine apare aici (generată de mai multe cauze).

c) $t_1 - t_0 \geq d_{r,\max}$*; în* t_1, *circuitul de întârziere are în mod necesar valoarea stării egală cu* 1 :

$$t_1 \geq t_0 + d_{r,\max} \text{ } si \text{ } \forall x \in f(u), x(t_1) = 1.$$

Cauza (intrarea e egală cu 1*) a fost suficient de persistentă pentru ca să producă un efect (starea circuitului este în mod necesar egală cu* 1*).*

*Descrierea intuitivă a circuitului continuă prin afirmarea valabilităţii unor cerinţe care sunt duale precedentelor, după cum rezultă prin înlocuirea lui 'r',*0,1 *cu 'f',*1,0*.*

Circuitul calculează identitatea pe **B** *deoarece dacă u e constant pentru un timp suficient de lung, x devine de asemenea constant şi egal cu u.*

O manieră de a descrie faptele precedente e dată de următorul sistem

$$\bigcap_{\xi \in [t - d_{r,\max}, t)} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t - d_{f,\max}, t)} u(\xi),$$

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t - d_{r,\min}, t)} u(\xi),$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t - d_{f,\min}, t)} \overline{u(\xi)}$$

chiar dacă acest lucru nu e evident pentru moment.

Să remarcăm existenţa unor aspecte de neanticipativitate şi invarianţă în timp care au însoţit modelarea anterioară a circuitului de întârziere.

Din punct de vedere istoric, ecuaţii şi inecuaţii cu funcţii $\mathbf{R} \to \mathbf{B}$ *care modelează circuitele asincrone au fost scrise pentru întâia oară de autor în anii 80. Lucrarea* [**36**] *a anticipat naşterea teoriei întârzierilor*[1] *şi* [**40**] *e lucrarea unde teoria a fost expusă mai întâi.*

---

[1]Faptele prezentate acolo au fost scrise sub impresia a ceea ce autorul a numit 'paradoxul inerţiei', i.e. teoriile neformalizate dedicate modelării circuitelor asincrone conduc spre posibilitatea ca două circuite de întârziere inerţiale legate în serie să nu fie un circuit de întârziere inerţial. 'Paradoxul' a fost rezolvat ulterior când s-a scos în evidenţă existenţa mai multor tipuri de inerţie, dintre care doar o parte (cum ar fi întârzierile mărginite) au proprietatea de închidere sub legarea în serie.

2. Definiţii informale ale întârzierilor

OBSERVATIE 95. *În această secţiune prezentăm câteva idei despre intuiţia din spatele teoriei întârzierilor.*

Prin cuvântul 'întârziere' înţelegem două lucruri: un număr real nenegativ şi o condiţie logică (în sens de model). În mod normal, în definiţii cele două apar împreună, deoarece o separare completă e foarte dificilă. Scopul nostru prezent e acela de a arăta cum numerele reale sunt precizate prin câteva reguli informale de modelare. Avem

Clasificarea întârzierilor*. Cu alte cuvinte, terminologia e următoarea. Ca numere, întârzierile sunt:*

i) întârzieri de transport [**13**], [**28**]*, sau întârzieri de transmitere a tranziţiilor* [**15**], [**16**]*;*

ii) întârzieri inerţiale [**13**]*, sau praguri de anulare* [**15**], [**16**].

Continuăm cu clasificarea întârzierilor - condiţii logice. Acestea, aşa-numitele condiţii de întârziere, definesc modele şi sintagme ca 'întârziere fixă' vor fi folosite adesea ca prescurtări pentru 'condiţie de întârziere fixă' sau 'proprietate de întârziere fixă' sau 'model de întârziere fixă'. Aşadar, din punctul de vedere al duratei temporale, avem:

j) întârzieri nemărginite;

jj) întârzieri mărginite;

jjj) întârzieri fixe,

iar din punctul de vedere al memoriei, întârzierile sunt:

1) întârzieri pure, i.e. întârzieri fără memorie;

2) întârzieri inerţiale, i.e. întârzieri cu memorie.

Vom acorda o atenţie mare evitării confuziei datorită abuzului terminologic remarcat la ii) şi 2).

În capitolele următoare prin întârziere vom înţelege (şi) un sistem asincron $f : S \to P^*(S)$ *care este stabil fără curse relativ la funcţia identică* $1_{\mathbf{B}}$, *modelul circuitului de întârziere. Clasificarea acestor sisteme va respecta clasificarea condiţiilor logice j), jj), jjj); 1), 2).*

Dăm acum câteva definiţii informale ale acestor concepte.

DEFINITIE 97. *(informală)* ***Întârzierile de transport*** [**13**], [**28**] *reprezintă 'intervalul de timp*[2] *dintre o tranziţie la intrarea porţii şi tranziţia corespunzătoare la ieşire. Dacă tranziţia la ieşire e de la 0 la 1, întârzierea e crescătoare, iar în caz contrar e descrescătoare'.*

DEFINITIE 98. *(informală)* ***Întârzierile inerţiale*** *reprezintă* [**13**] *'durata minimă de timp cât un semnal de intrare trebuie să fie persistent pentru a produce o schimbare la ieşire'.*

În [**17**] *aceeaşi noţiune e numită* ***întârziere potenţială*** *(latency delay) iar în* [**28**]*, prin folosirea limbajului de descriere hardware VHDL,* ***timp de rejecţie****. În* [**8**] *terminologia e aceea de* ***prag*** *(threshold period).*

OBSERVATIE 96. *Avem următoarea* ***Convenţie****: numerele distincte întârziere de transport şi întârziere inerţială sunt luate în general egale* [**17**] *atunci când ultimul există, i.e. în prezenţa inerţiei. Cităm aici următoarea opinie* [**15**], [**16**]*: 'O formă uzuală de implementare a modelului de întârziere inerţială' (ne referim*

[2]Definiţia nu se referă la un interval de timp, care e o mulţime, ci la lungimea intervalului, care e un număr real pozitiv.

aici la 2)) 'e acela în care întârzierea de transmitere a tranziţiilor d e aceeaşi ca şi pragul de anulare. Cu alte cuvinte, când o tranziţie apare la intrare' (afirmaţia înseamnă că $\overline{u(t-0)}\cdot u(t)=1$ *sau* $u(t-0)\cdot\overline{u(t)}=1$*), 'tranziţia va apărea la ieşire după d' (determinism plus* $\overline{x(t+d-0)}\cdot x(t+d)=1$ *sau* $x(t+d-0)\cdot\overline{x(t+d)}=1$*) 'excepţie cazul când o a doua tranziţie apare în acea perioadă' (i.e. doar dacă* $\forall\xi\in(t,t+d), Du(\xi)=0$*).*

DEFINITIE 99. *(informală)* ***Întârzierea nemărginită*** *e definită de:*

a) [**8**]*: 'o întârziere poate lua orice valoare finită';*

b) [**14**]*: 'nici o margine superioară a mărimii (întârzierii) nu e cunoscută a priori, doar aceea că e pozitivă şi finită'.*

OBSERVATIE 97. *Citaţiile din definiţia anterioară se referă la întârziere-număr în sensul i) de întârziere de transport din clasificarea noastră.*

Menţionăm existenţa unei idei similare de nemărginire, numită ***corectitudine slabă finită*** *(finitary weak-fairness) care e definită*[3] *în timp discret prin: 'pentru orice acţiune (run) a sistemului*[4]*, există o margine necunoscută k aşa încât nici o tranziţie pe cale să se producă nu e amânată mai mult decât k momente consecutive de timp.'*

Modelul de întârziere nemărginită e în general considerat ca fiind [**6**] *'robust la variaţiile întârzierii', dar 'nerealist de general' (unrealistically conservative).*

DEFINITIE 100. *(informală)* ***Întârzierea mărginită*** *(care în* [**28**] *e numită* ***întârziere min-max****) e definită prin:*

a) [**8**]*: 'o întârziere poate avea orice valoare într-un interval dat';*

b) [**14**]*: o întârziere e mărginită 'dacă înainte ca sinteza sau analiza circuitului să fi început, se dau o margine superioară şi una inferioară a mărimii sale';*

c) [**6**]*: 'orice componentă se presupune că are o întârziere necunoscută, care se află între o margine superioară şi una inferioară, date. Marginile întârzierii ţin cont de variaţiile potenţiale ale întârzierii datorate fluctuaţiilor statistice apărute în procesul de fabricaţie, variaţiilor temperaturii ambientale, sursei de alimentare etc.';*

d) [**13**]*: 'În practică, circuitele proiectate să fie identice pot avea diferite întârzieri ale porţilor datorate fluctuaţiilor apărute în momentul producţiei şi care afectează parametrii legaţi de întârzieri cum ar fi capacitatea, rezistenţa şi dimensiunea tranzistoarelor. Pentru a fi practici, avem nevoie să analizăm nu doar producţia unei serii proiectate, ci întraga familie de circuite proiectate identic. Pentru a modela incertitudinile din producţie, presupunem că întârzierile porţilor sunt variabile în interiorul unor intervale închise. Aşadar o analiză completă a întârzierilor se referă la circuite cu întârzieri variabile ale porţilor. . . '*

OBSERVATIE 98. *Modelul de întârziere mărginită e considerat ca fiind cel mai realist dintre cele trei, când întârzierea e nemărginită, mărginită şi fixă.*

Pe de altă parte, diferenţe neconflictuale apar în această analiză atunci când se definesc şi se utilizează întârzierile mărginite în variante diferite: de la a nu avea margini inferioare sau superioare, cel mai sărac caz de model de întârziere mărginită, la a avea toate cele patru margini $d_{r,\min}\le d_{r,\max}$*,* $d_{f,\min}\le d_{f,\max}$*, cel mai bogat caz de întârzieri mărginite care uzează de distincţia dintre întârzirile*

[3] Rajeev Alur, Thomas Henzinger, Finitary Fairness, Proc. of the Ninth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 1994, pp 52-61

[4] ceva de genul $\forall x\in f(u)$

crescătoare şi cele descrescătoare. Cu cât mai detaliat e modelul, cu atât mai dificilă e utilizarea sa şi cu atât mai realiste sunt rezultatele.

DEFINITIE 101. *(informală)* ***Întârzierea fixă*** *e un caz particular de întârziere mărginită, când ea 'se presupune că are o valoare fixă'* [**8**] *şi marginile sale inferioare sunt egale cu cele superioare, făcând ca întârzierea să fie fixă, cunoscută.*

OBSERVATIE 99. *Modelul de întârziere fixă e considerat ca fiind foarte nerealist, în sensul că mici variaţii ale întârzierilor datorate variaţiilor temperaturii ambientale, ale sursei de alimentare,... cauzează diferenţe mari, inacceptabile între model şi circuitul modelat.* [**6**]*: 'Deoarece e aproape imposibil să obţinem o întârziere precisă a unei componente dintr-un chip, acesta nu este un model realist pentru scopul de verificare (a funcţionării circuitului) în timp'.*

DEFINITIE 102. *(informală)* ***Întârzierea pură****, sau* ***întârzierea ideală*** *se defineşte în felul următor:*

a) [**14**]*: o întârziere e considerată pură 'dacă ea transmite fiecare eveniment de la intrare la ieşire*[5]*, i.e. ea corespunde unei translaţii pure în timp a intrării';*

b) [**6**]*: 'o întârziere pură translatează în timp un semnal (waveform) fără a-i altera forma'.*

Aceeaşi idee se găseşte în [**13**]*, unde se definesc funcţiile Boolene temporale cu întârzieri pure.*

OBSERVATIE 100. [**16**] *se referă la întârzierile pure, considerând că 'Acest model e nerealist în sensul că porţile practic nu vor tranzita un impuls cauzat de două tranziţii foarte apropiate, în timp ce modelul garantează că fiecare tranziţie va ajunge la ieşire indiferent de apropierea impulsurilor succesive'.*

DEFINITIE 103. *(informală)* ***Întârzierea inerţială*** *(sau* ***potenţială****) a generat cele mai multe controverse, vezi de asemenea* [**6**], [**13**]. *Următoarele opinii sunt în general acceptate:*

a) întârzierile inerţiale [**15**], [**16**] *'modelează faptul că circuitele nu răspund la două tranziţii care sunt foarte apropiate. Modelul de întârziere inerţial e acela în care tranziţiile de la intrare sunt reproduse la ieşire după un timp, excepţie cazul când două tranziţii au loc la intrare într-un interval dat şi când nici o tranziţie nu se transmite';*

b) [**14**]*: 'impulsuri mai scurte sau egale cu mărimea întârzierii nu sunt transmise', vezi şi Convenţia din Observaţia 96, deoarece aici prin mărimea întârzierii se înţelege întârzierea de transport egală cu întârzierea inerţială;*

c) [**8**]*: 'o întârziere inerţială are un prag d. Impulsurile de durată mai mică decât d sunt filtrate' (în sensul că sunt eliminate). Aici întârzierea inerţială e de fapt modelul de întârziere inerţială, iar Convenţia nu e în mod necesar satisfăcută.*

DEFINITIE 104. *(versiune) În* [**1**], [**17**] *autorii arată în mod intuitiv ce este inerţia şi apoi se dau două versiuni de întârzieri inerţiale fixe şi respectiv mărginite. Reproducem doar a doua versiune din* [**1**]*, numită acolo întârziere inerţială nedeterministă, în scopul de a face expunerea cât mai simplă posibil. Pentru acelaşi motiv, am schimbat limbajul şi notaţiile. Se dau starea* $x^0 \in \mathbf{B}$ *şi numerele reale* $0 \le d_{\min} \le d_{\max}$ *iar cerinţele sunt*

i) $\forall t \in [0, d_{\min}), x(t) = x^0$ *(iniţializare);*

[5]'evenimentele' de la intrare sunt $\overline{u(t-0)} \cdot u(t) = 1, u(t-0) \cdot \overline{u(t)} = 1$ şi 'evenimentele' de la ieşire sunt $\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 1, x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 1$

ii) $\forall t \geq d_{\min}, Dx(t) = 1 \Longrightarrow \exists t' \in suppDu \cap [t - d_{\max}, t - d_{\min}]$ *aşa încât* $x(t) = u(t')$ *si* $(t', t) \cap$ *suppDu* $= \emptyset$;

iii) $\forall t \in suppDu, (t, t+d_{\max}] \cap$ *suppDu* $\neq \emptyset$ *sau* $[t+d_{\min}, t+d_{\max}] \cap$ *suppDx* $\neq \emptyset$.

OBSERVATIE 101. *În* [**1**] *putem găsi următoarea remarcă relativă la Definiţia 104: 'se poate presupune că schimbările trebuie să persiste cel puţin* l_1 *unităţi de timp dar se propagă după* $l_2, l_2 > l_1$ *unităţi de timp'. Cu alte cuvinte, de dragul preciziei se poate abandona 'forma uzuală de implementare a modelului de întârziere inerţială' din Convenţia de la Observaţia 96.*

DEFINITIE 105. *(versiune) În lucrarea* [**5**]*, se dau tot două versiuni de întârzieri inerţiale fixe respectiv mărginite. Dintre ele o reproducem pe a doua sub forma:*

i) $Dx(t) = 1 \Longrightarrow \forall \xi \in [t - d_{\min}, t), u(\xi) = x(t)$;

ii) $\forall \lambda \in \mathbf{B}, ((\forall \xi \in [t, t + d_{\max}), u(\xi) = \lambda) \Longrightarrow (\exists \delta \in [t, t + d_{\max}), \forall \xi \in [\delta, t + d_{\max}), x(\xi) = \lambda))$.

OBSERVATIE 102. *Facem câteva comentarii scurte şi o comparaţie între Definiţia 104 şi Definiţia 105:*

- în definiţia a doua, iniţializarea lipseşte. Dacă pornim prin definiţie din condiţii iniţiale nule, atunci iniţializarea nu e necesară şi dacă raţionăm pentru orice valoare iniţială posibilă, atunci iniţializarea lipseşte de asemenea. Posibilitatea ca iniţializarea să lipsească şi în Definiţia 104 e dată de valoarea $d_{\min} = 0$;

- Definiţia 104, ii) şi Definiţia 105, i) exprimă în mod esenţial aceeaşi idee, chiar dacă ele în mod evident nu sunt echivalente. Similar, Definiţia 104, iii) exprimă ideea din Definiţia 105, ii).

O problemă subtilă care se iveşte aici e aceea dacă în clasificarea noastră dată întârzierilor din Observaţia 95, oricare dintre i), ii) e compatibil cu oricare dintre j), jj), jjj) şi cu oricare dintre 1), 2). În momentul prezent al dezbaterii pe această temă, confirmăm doar că i), ii) sunt ambele compatibile cu 2), după cum arată multi autori.

3. Întârzierea universală

NOTATIE 24. *Pentru* $\lambda \in \mathbf{B}$*, facem notaţia*

$$S_c(\lambda) = \{x | x \in S, \lim_{t \to \infty} x(t) = \lambda\}.$$

DEFINITIE 106. *Sistemul* $f_{UD} : S \to P^*(S)$ *definit de*

$$\forall u \in S, f_{UD}(u) = \begin{cases} S_c(0), \text{dacă } u \in S_c(0) \\ S_c(1), \text{dacă } u \in S_c(1) \\ S, \text{dacă } u \in S \setminus S_c \end{cases}$$

e numit ***întârzierea universală*** *(sau* ***condiţia***, ***proprietatea***, ***modelul de întârziere universală****).*

OBSERVATIE 103. *Sistemul* f_{UD} *modelează circuitele de întârziere, i.e. circuitele care calculează identitatea* $1_{\mathbf{B}} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *şi dă informaţia minimă despre aceste circuite.*

TEOREMĂ 249. *Funcţia stare iniţială* $\phi_0 : S \to P^*(\mathbf{B})$ *a lui* f_{UD} *este constantă:*

$$\forall u \in S, \phi_0(u) = \{0, 1\}.$$

TEOREMĂ 250. *Sistemul* f_{UD} *e auto-dual.*

DEMONSTRAŢIE. Observăm că $S = S^*$. Avem

$$\forall u \in S, f_{UD}^*(u) = \{\overline{x} | x \in f_{UD}(\overline{u})\} = \begin{cases} S_c(0)^*, \textit{dacă}\ \overline{u} \in S_c(0) \\ S_c(1)^*, \textit{dacă}\ \overline{u} \in S_c(1) \\ S^*, \textit{dacă}\ \overline{u} \in S \setminus S_c \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} S_c(1), \textit{dacă}\ u \in S_c(1) \\ S_c(0), \textit{dacă}\ u \in S_c(0) \\ S, \textit{dacă}\ u \in S \setminus S_c \end{cases} = f_{UD}(u).$$

□

OBSERVATIE 104. *Inversul lui f_{UD} e sistemul definit prin:* $f_{UD}^{-1} : S \to P^*(S)$,

$$\forall x \in S, f_{UD}^{-1}(x) = \begin{cases} S \setminus S_c(1), \textit{dacă}\ x \in S_c(0) \\ S \setminus S_c(0), \textit{dacă}\ x \in S_c(1) \\ S \setminus S_c, \textit{dacă}\ x \in S \setminus S_c \end{cases}.$$

TEOREMĂ 251. $f_{UD} \circ f_{UD} = f_{UD}$.

DEMONSTRAŢIE. Avem două posibilităţi.
a) Dacă $u \in S_c(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{B}$, atunci

$$(f_{UD} \circ f_{UD})(u) = \bigcup_{y \in f_{UD}(u)} f_{UD}(y) = \bigcup_{y \in S_c(\lambda)} f_{UD}(y) =$$

$$= \bigcup_{y \in S_c(\lambda)} S_c(\lambda) = S_c(\lambda) = f_{UD}(u).$$

b) Dacă $u \in S \setminus S_c$, atunci

$$(f_{UD} \circ f_{UD})(u) = \bigcup_{y \in f_{UD}(u)} f_{UD}(y) = \bigcup_{y \in S} f_{UD}(y) \supset \bigcup_{y \in S \setminus S_c} f_{UD}(y) = \bigcup_{y \in S \setminus S_c} S = S.$$

Incluziunea $\forall u \in S \setminus S_c, (f_{UD} \circ f_{UD})(u) \subset S$ e evidentă, deci $(f_{UD} \circ f_{UD})(u) = S$. Deoarece

$$\forall u \in S \setminus S_c, f_{UD}(u) = S,$$

şi în acest caz afirmaţia teoremei e adevărată. □

TEOREMĂ 252. *Sistemul f_{UD} e invariant în timp.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $u \in S$ şi $d \in \mathbf{R}$ arbitrare. Putem scrie

$$f_{UD}(u \circ \tau^d) = \begin{cases} S_c(0), \textit{dacă}\ u \circ \tau^d \in S_c(0) \\ S_c(1), \textit{dacă}\ u \circ \tau^d \in S_c(1) \\ S, \textit{dacă}\ u \circ \tau^d \in S \setminus S_c \end{cases} = \begin{cases} S_c(0), \textit{dacă}\ u \in S_c(0) \\ S_c(1), \textit{dacă}\ u \in S_c(1) \\ S, \textit{dacă}\ u \in S \setminus S_c \end{cases} =$$

$$= \{x \circ \tau^d | x \in \begin{cases} S_c(0), \textit{dacă}\ u \in S_c(0) \\ S_c(1), \textit{dacă}\ u \in S_c(1) \\ S, \textit{dacă}\ u \in S \setminus S_c \end{cases} \} = \{x \circ \tau^d | x \in f_{UD}(u)\}.$$

□

TEOREMĂ 253. *Sistemul f_{UD} e neanticipativ în sensul Definiţiei 64 şi în sensul tuturor conceptelor de neanticipativitate conţinute în Definiţia 65.*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm prima afirmaţie, deoarece celelalte sunt similare. Fie $u, v \in S$ şi $t \in \mathbf{R}$ alese în mod arbitrar, iar ipoteza afirmă că $u_{|(-\infty,t)} = v_{|(-\infty,t)}$. Avem

$$\{x_{|(-\infty,t]}|x \in f_{UD}(u)\} = \{x_{|(-\infty,t]}|x \in S\} = \{y_{|(-\infty,t]}|y \in f_{UD}(v)\}.$$

□

TEOREMĂ 254. *Sistemul f_{UD} e neanticipativ*.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $u, v \in S$ şi $t \in \mathbf{R}$ arbitrare, aşa încât $u_{|[t,\infty)} = v_{|[t,\infty)}$. Deoarece $\{x(t)|x \in f_{UD}(u)\} = \{0,1\} = \{y(t)|y \in f_{UD}(v)\}$ e adevărată, avem posibilităţile:

a) $\exists\lambda \in \mathbf{B}, u, v \in S_c(\lambda)$. Atunci

$$\{x_{|[t,\infty)}|x \in f_{UD}(u)\} = \{x_{|[t,\infty)}|x \in S_c(\lambda)\} = \{y_{|[t,\infty)}|y \in f_{UD}(v)\};$$

b) $u, v \in S \setminus S_c$ şi

$$\{x_{|[t,\infty)}|x \in f_{UD}(u)\} = \{x_{|[t,\infty)}|x \in S\} = \{y_{|[t,\infty)}|y \in f_{UD}(v)\}.$$

□

TEOREMĂ 255. *Sistemul f_{UD} satisface următoarele proprietăţi de surjectivitate:*

$$\forall x \in S, \exists u \in S, x \in f_{UD}(u);$$
$$\forall \mu \in \mathbf{B}, \exists u \in S, \forall x \in f_{UD}(u), x(\infty - 0) = \mu.$$

TEOREMĂ 256. *Sistemul f_{UD} e relativ stabil fără curse şi stabil fără curse relativ la funcţia identică $1_{\mathbf{B}} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$.*

DEMONSTRAŢIE. Observăm că $S_c = S_{1_{\mathbf{B}},c}$ şi

$$\forall u \in S_c, \forall x \in f_{UD}(u), x(\infty - 0) = u(\infty - 0),$$

deci cele două afirmaţii sunt adevărate. □

4. Întârzieri

TEOREMĂ 257. *Fie sistemul $f : S \to P^*(S)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $f \subset f_{UD}$;

b) f e stabil fără curse relativ la funcţia $1_{\mathbf{B}}$.

DEMONSTRAŢIE. *a)* $\Longrightarrow$ *b)* Sistemul f_{UD} e stabil fără curse relativ la $1_{\mathbf{B}}$ (Teorema 256) şi oricare din subsistemele sale având mulţimea suport S satisface aceeaşi proprietate.

b) $\Longrightarrow$ *a)* Presupunem că f e stabil fără curse relativ la $1_{\mathbf{B}}$, ceea ce înseamnă că

$$\forall \lambda \in \mathbf{B}, \forall u \in S_c(\lambda), \forall x \in f(u), x(\infty - 0) = \lambda.$$

Dacă $u \in S_c(0)$, atunci $f(u) \subset S_c(0)$; dacă $u \in S_c(1)$, atunci $f(u) \subset S_c(1)$ şi dacă $u \in S \setminus S_c$, atunci $f(u) \subset S$, i.e. a) e adevărată. □

DEFINITIE 107. *Dacă un sistem $f : S \to P^*(S)$ satisface una din condiţiile anterioare a), b), atunci el se numeşte **condiţie de întârziere** sau pe scurt **întârziere**.*

OBSERVATIE 105. *Întârzierile modelează circuitele de întârziere şi dau despre ele mai multe informaţii în general decât* f_{UD}.

Conceptul de întârziere trebuie identificat cu acela de întârziere nemărginită din Definiţia 99, în ciuda faptului că nu e nevoie de întârziere de transport (pozitivă) aici. Acest lucru înseamnă că suntem de acord mai degrabă cu punctul a) decât cu punctul b) din acea definiţie.

TEOREMĂ 258. *Orice subsistem* $f : S \to P^*(S)$ *al unei întârzieri* g *e o întârziere.*

DEFINITIE 108. *Fie întârzierile* f, g *cu* $f \subset g$. *Atunci* f *e numit* ***subîntârziere*** *a lui* g.

OBSERVATIE 106. *Sistemul* f_{UD} *e cea mai mare întârziere relativ la incluziunea întârzierilor* $\subset$.

TEOREMĂ 259. *În prezenţa axiomei alegerii, orice întârziere are o subîntârziere deterministă.*

DEMONSTRAŢIE. Vezi Teorema 127 şi demonstraţia sa. □

TEOREMĂ 260. *În incluziunea de întârzieri* $f \subset g$, *dacă* g *e deterministă, atunci* f *e deterministă şi* $f = g$.

DEMONSTRAŢIE. Vezi Teorema 126. □

TEOREMĂ 261. *Duala unei întârzieri* f *e o întârziere.*

DEMONSTRAŢIE. Mulţimea S e invariantă la complemente: $\forall u, u \in S \Longrightarrow \overline{u} \in S$. Pe de altă parte, fie $\lambda \in \mathbf{B}$ şi $u \in S_c(\lambda)$ arbitrare. Afirmaţia decurge din aceea că

$$f^*(u) = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} \subset \{\overline{x} | x \in S_c(\overline{\lambda})\} = S_c(\lambda).$$

□

TEOREMĂ 262. *Legarea în serie a două întârzieri e o întârziere.*

DEMONSTRAŢIE. Date fiind întârzierile $f, g : S \to P^*(S)$, cerinţa de existenţă a legării lor în serie $g \circ f : S \to P^*(S)$, $\forall u \in S, (g \circ f)(u) = \{y | \exists x \in f(u), y \in g(x)\}$ este ca $\bigcup_{u \in S} f(u) \subset S$ şi e îndeplinită. Mai mult, pentru orice $u \in S$, avem:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(u) &\subset (g \circ f_{UD})(u) && \text{(Teorema 74 a))} \\ &\subset (f_{UD} \circ f_{UD})(u) && \text{(Teorema 74 b))} \\ &= f_{UD}(u). && \text{(Teorema 251)} \end{aligned}$$

□

TEOREMĂ 263. *Intersecţia întârzierilor* $f, g : S \to P^*(S)$ *cu* $\forall u \in S, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$ *e o întârziere.*

DEMONSTRAŢIE. Intersecţia întârzierilor f, g ca sisteme a fost definită prin $f \cap g : W \to P^*(S)$, $\forall u \in W$, $(f \cap g)(u) = f(u) \cap g(u)$ şi s-a presupus că mulţimea $W = \{u | u \in S \cap S, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset\}$ e nevidă. Se observă din ipoteză că $W = S$. $f \cap g$ e o subîntârziere a lui f, vezi Teorema 258. □

OBSERVATIE 107. *Precedenta teoremă se generalizează uşor în următorul fel. Date* $f, g : S \to P^*(S)$, *unde* f *e un sistem arbitrar şi* g *e o întârziere aşa încât* $\forall u \in S, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, *intersecţia* $f \cap g$ *e o întârziere. Avem aici cazul particular când* $g = f_{UD}$; *întârzierea* h *dată de*

$$\forall u \in S, h(u) = f(u) \cap f_{UD}(u)$$

se numeşte ***întârzierea definită*** *(sau* ***indusă****)* ***de sistemul*** f.

TEOREMĂ 264. *Reuniunea a două întârzieri e o întârziere.*

DEMONSTRAŢIE. Să considerăm întârzierile f, g şi reuniunea lor $f \cup g$. Putem vedea că domeniul de definiţie al lui $f \cup g$ este $S \cup S = S$ şi luăm nişte $\lambda \in \mathbf{B}$, $u \in S_c(\lambda)$ arbitrare. Avem $f(u) \cup g(u) \subset S_c(\lambda)$. $\square$

TEOREMĂ 265. *Fie întârzierile deterministe* $f_1, f_2 : S \to S$ *care satisfac*

$$\forall u \in S, \forall t \in \mathbf{R}, f_1(u)(t) \leq f_2(u)(t)$$

şi sistemul $f : S \to P^*(S)$ *definit de*

$$\forall u \in S, f(u) = \{x | \forall t \in \mathbf{R}, f_1(u)(t) \leq x(t) \leq f_2(u)(t)\}.$$

Atunci f *e o întârziere.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\lambda \in \mathbf{B}$ şi $u \in S_c(\lambda)$ arbitrare. Există $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ aşa încât $f_1(u)_{|[t_1,\infty)} = f_2(u)_{|[t_2,\infty)} = \lambda$, deci $f(u) \subset S_c(\lambda)$. $\square$

OBSERVATIE 108. *Nu există întârzieri autonome. Pe de altă parte, singura funcţie Booleană pentru care* F_d *e o întârziere,* $d \in \mathbf{R}$ *e* $F = 1_{\mathbf{B}}$.

5. Exemple de întârzieri

EXEMPLU 95. *Întârzierea deterministă* $I_d : S \to S$ *se defineşte pentru* $d \in \mathbf{R}$ *în felul următor:*

$$\forall u \in S, I_d(u)(t) = u(t - d).$$

În loc de I_0 *obişnuim să folosim notaţia* I. *Remarcăm că* I *e elementul neutru al legării în serie a întârzierilor: pentru orice întârziere* f *avem*

$$\forall u \in S, (f \circ I)(u) = \{y | \exists x, x = u, y \in f(x)\} = f(u),$$

$$\forall u \in S, (I \circ f)(u) = \{y | \exists x, x \in f(u), y = x\} = f(u).$$

Întârzierea I_d *are toate proprietăţile sistemelor combinaţionale ideale. Alte proprietăţi ale sale vor fi prezentate mai târziu.*

EXEMPLU 96. *Fie* $d_1, d_2, ..., d_k \in \mathbf{R}$ *şi* f *întârzierea rezultată prin reuniunea* $I_{d_1} \cup I_{d_2} \cup ... \cup I_{d_k}$. *Dacă* $d_1, d_2, ..., d_k$ *sunt distincte, avem*

$$\forall u \in S, f(u) = \{u \circ \tau^{d_1}, u \circ \tau^{d_2}, ..., u \circ \tau^{d_k}\}.$$

EXEMPLU 97. *Definim întârzierea* f *prin*

$$\forall u \in S, f(u)(t) = \{x | u(t - d) \leq x(t) \leq u(t - d) \cup u(t - d')\},$$

unde $d, d' \in \mathbf{R}$, *vezi Teorema 265.*

EXEMPLU 98. *Definim* $f : S \to S$,

$$\forall u \in S, f(u)(t) = \lim_{\xi \to \infty} \bigcap_{\omega \in [\xi,\infty)} u(\omega).$$

Mai întâi observăm că funcţia în $\xi : \bigcap_{\omega \in [\xi,\infty)} u(\omega)$ *e monoton crescătoare, ceea ce implică existenţa limitei. În continuare, dacă* $u \in S_c(\lambda)$ *pentru* $\lambda \in \mathbf{B}$, *avem* $f(u) = \lambda$, *deci* f *e o întârziere, într-adevăr. Avem*

$$\forall u \in S, f(u)(t) = \begin{cases} 1, dacă\ u \in S_c(1) \\ 0,\ altfel \end{cases}.$$

În mod similar, sistemul determinist $f : S \to S$,

$$\forall u \in S, f(u)(t) = \lim_{\xi \to \infty} \bigcup_{\omega \in [\xi,\infty)} u(\omega) = \begin{cases} 0, dacă\ u \in S_c(0) \\ 1,\ altfel \end{cases}$$

este o întârziere.

OBSERVATIE 109. *Înspiraţi de exemplul anterior şi făcând uz de Teorema 265, definim întârzierea nedeterministă* $f : S \to P^*(S)$ *prin*

$$\forall u \in S, f(u)(t) = \{x | x \in S, \lim_{\xi \to \infty} \bigcap_{\omega \in [\xi,\infty)} u(\omega) \leq x(t) \leq \lim_{\xi \to \infty} \bigcup_{\omega \in [\xi,\infty)} u(\omega)\}.$$

Se vede că f *coincide cu* f_{UD}.

EXEMPLU 99. *Sistemul determinist* $f : S \to S$ *definit prin*

$$\forall u \in S, f(u)(t) = \bigcap_{\xi \in [t,\infty)} u(\xi)$$

este o întârziere. Într-adevăr, pentru toţi $u \in S$ *avem* $f(u) \in S$ *ceea ce se demonstrează similar cu Teorema 23. Pe de altă parte, dacă există* $\lambda \in \mathbf{B}$ *aşa încât* $u \in S_c(\lambda)$, *atunci există* $t_1 \in \mathbf{R}$ *astfel încât* $u_{|[t_1,\infty)} = \lambda$ *şi* $f(u)_{|[t_1,\infty)} = \lambda$, *deci* $f(u) \in S_c(\lambda)$.

Sistemul determinist $f : S \to S$,

$$\forall u \in S, f(u)(t) = \bigcup_{\xi \in [t,\infty)} u(\xi)$$

este o întârziere de asemenea.

EXEMPLU 100. *Din exemplul de mai înainte şi din Teorema 265 obţinem că sistemul*

$$\forall u \in S, f(u)(t) = \{x | \bigcap_{\xi \in [t,\infty)} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t,\infty)} u(\xi)\}$$

este o întârziere.

EXEMPLU 101. *Pentru* $0 \leq m \leq d$, *datorită Teoremei 23, funcţia*

$$x(t) = \bigcap_{\xi \in [t-d,t-d+m]} u(\xi)$$

este un semnal, deci $x(t) = f(u)(t)$ defineşte o întârziere deterministă. Trei alte întârzieri sunt definite de[6]*:*

$$x(t) = \bigcap_{\xi\in[t,t+d]} u(\xi);$$

$$x(t) = \bigcup_{\xi\in[t-d,t-d+m]} u(\xi);$$

$$x(t) = \bigcup_{\xi\in[t,t+d]} u(\xi).$$

EXEMPLU 102. *Următoarele inegalităţi definesc întârzieri nedeterministe:*

$$\bigcap_{\xi\in[t-d,t]} u(\xi) \le x(t) \le u(t);$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d,t]} u(\xi) \le x(t) \le u(t-d) \cup u(t);$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d,t]} u(\xi) \le x(t) \le \bigcup_{\xi\in[t,t+d]} u(\xi)$$

pentru orice $d > 0$. Există şi posibilitatea ca $d = 0$, când cele trei întârzieri coincid cu întârzierea deterministă I.

EXEMPLU 103. *Sistemul*

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-\delta_f-0)} \cdot \bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t)} \overline{x(\xi)} \cdot u(t), \tag{5.1}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-\delta_r-0) \cdot \bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t)} x(\xi) \cdot \overline{u(t)}, \tag{5.2}$$

$\delta_r \ge 0, \delta_f \ge 0$, defineşte o întârziere dacă şi numai dacă $\delta_r = \delta_f = 0$. În această situaţie el coincide cu identitatea I.

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că $\delta_r > 0$ şi fie intrarea $u = \chi_{[0,\delta)}$, unde $\delta \in (0, \delta_r)$. Rezolvăm sistemul format din ecuaţiile (5.1), (5.2).

$t < 0$. Avem

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 0, \tag{5.3}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-\delta_r-0) \cdot \bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t)} x(\xi), \tag{5.4}$$

pentru care singura soluţie satisface $x(t) = 0$. Într-adevăr, presupunerea că există $t_0 \le 0$ aşa încât $x_{|(-\infty,t_0)} = 1$ face ca (5.4) să fie falsă pentru $t < t_0$. Presupunerea că există $t < 0$ aşa încât $x_{|(-\infty,t)} = 0, x(t) = 1$ face ca (5.3) să fie falsă în t.

$t = 0$.

$$\overline{x(0-0)} \cdot x(0) = 1, \tag{5.5}$$

$$x(0-0) \cdot \overline{x(0)} = 0, \tag{5.6}$$

deci $x(0) = 1$.

[6]Prima şi a treia dintre aceste patru întârzieri, în versiunea lor de timp discret, sunt numite de Moisil relee cu acţiune lentă: releu cu închidere lentă şi releu cu deschidere lentă.

$t \in (0, \delta)$.

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-\delta_f-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t)} \overline{x(\xi)}, \tag{5.7}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 0 \tag{5.8}$$

implică $x(t) = 1$.

$t \in [\delta, \delta_r]$.

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 0, \tag{5.9}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-\delta_r-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t)} x(\xi) \tag{5.10}$$

şi, în (5.10), $x(t-\delta_r-0) = 0$, deci $x(t) = 1$.

$t > \delta_r$.

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 0, \tag{5.11}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-\delta_r-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t)} x(\xi). \tag{5.12}$$

Ecuaţia (5.12) cu $\forall t > \delta_r, x(t-\delta_r-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t)} x(\xi) = 1$ e contradictorie şi presupunerea că x comută de la 1 la 0 undeva la dreapta lui δ_r dă o contradicţie de asemenea.

Similar, $\delta_f > 0$ dă o contradicţie, deci $\delta_r = \delta_f = 0$ şi sistemul (5.1), (5.2) devine

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot u(t), \tag{5.13}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \overline{u(t)}. \tag{5.14}$$

Fie $t_0 \in \mathbf{R}$ numărul cu proprietatea că $x_{|(-\infty,t_0)} = x(-\infty+0), u_{|(-\infty,t_0)} = u(-\infty+0)$. Substituţia în (5.13), (5.14), pentru $t < t_0$, a lui $x(t-0), x(t)$, cu $x(-\infty+0)$ şi a lui $u(t-0), u(t)$, cu $u(-\infty+0)$, arată că $x(-\infty+0) = u(-\infty+0)$. Dacă presupunem prin absurd că (5.13), (5.14) diferă de I, atunci există $t_1 \geq t_0$ aşa încât $x_{|(-\infty,t_1)} = u_{|(-\infty,t_1)}$ şi $x(t_1) \neq u(t_1)$. Totuşi, această presupunere implică aceea că

$$\overline{x(t_1-0)} \cdot x(t_1) = \overline{x(t_1-0)} \cdot \overline{x(t_1)}, \tag{5.15}$$

$$x(t_1-0) \cdot \overline{x(t_1)} = x(t_1-0) \cdot x(t_1) \tag{5.16}$$

e un sistem incompatibil. Aşadar (5.13), (5.14) coincide cu I. $\square$

CAPITOLUL 11

Întârzieri mărginite

Întârzierile mărginite f sunt acelea pentru care comutarea intrării de la 0 la 1 în $t_0 : \overline{u(t_0-0)} \cdot u(t_0) = 1$ produce o comutare de la 0 la 1 a stării corespunzătoare într-un interval de timp mărginit

$$\forall x \in f(u), \exists t_1 \in \mathbf{R}, t_1 - t_0 \in [d_{r,\min}, d_{r,\max}] \ si\ \overline{x(t_1-0)} \cdot x(t_1) = 1$$

unde $0 \leq d_{r,\min} \leq d_{r,\max}$ sunt independente de celelalte variabile. Întârzierile mărginite f satisfac de asemenea proprietatea duală relativ la parametrii $0 \leq d_{f,\min} \leq d_{f,\max}$[1].

Scopul acestui capitol e acela de a da mai multe definiţii ale întârzierilor mărginite.

1. Prima definiţie a întârzierilor mărginite

TEOREMĂ 266. *Fie numerele $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:*

a) inegalitatea

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) \tag{1.1}$$

are o soluţie $x \in S$ pentru orice $u \in S$;

b) pentru orice $u \in S$ avem

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi); \tag{1.2}$$

c) sunt satisfăcute următoarele inegalităţi

$$d_r - m_r \leq d_f \ si\ d_f - m_f \leq d_r \tag{1.3}$$

DEMONSTRAŢIE. $a) \Longrightarrow b)$ e evidentă.

$b) \Longrightarrow a)$ Pentru orice $u \in S$, funcţiile $\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi)$, $\bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi)$ aparţin lui S şi sunt soluţii ale lui (1.1).

$b) \Longrightarrow c)$ Arătăm că b) implică

$$\forall t \in \mathbf{R}, [t-d_r, t-d_r+m_r] \cap [t-d_f, t-d_f+m_f] \neq \emptyset. \tag{1.4}$$

Într-adevăr, dacă (1.4) este falsă, atunci

$$\exists t \in \mathbf{R}, [t-d_r, t-d_r+m_r] \cap [t-d_f, t-d_f+m_f] = \emptyset.$$

[1] Prin aceste câteva cuvinte ne-am propus doar să evidenţiem mărginirea întârzierilor. Aceasta nu este o definiţie corectă a întârzierilor mărginite.

Fie t un astfel de moment al timpului, fixat. Atunci există un $u \in S$ cu proprietatea că $supp\, u \supset [t - d_r, t - d_r + m_r]$, $supp\, u \cap [t - d_f, t - d_f + m_f] = \emptyset$, ceea ce face ca ipoteza b) să fie falsă, contradicţie.

Din (1.4) deducem că pentru orice $t \in \mathbf{R}$ putem scrie

$$non\ (t - d_r + m_r < t - d_f \ sau\ t - d_f + m_f < t - d_r)$$

$$\Longleftrightarrow t - d_r + m_r \geq t - d_f \ si\ t - d_f + m_f \geq t - d_r,$$

i.e. c) este adevărată.

c) $\Longrightarrow$ *b)* Parcurgem raţionamentul precedent în sens invers: c) implică (1.4) şi fie $t \in \mathbf{R}$ arbitrar, fixat, pentru care există $\xi_0 \in [t - d_r, t - d_r + m_r] \cap [t - d_f, t - d_f + m_f]$. Pentru orice $u \in S$, putem scrie că

$$\bigcap_{\xi \in [t - d_r, t - d_r + m_r]} u(\xi) \leq u(\xi_0) \leq \bigcup_{\xi \in [t - d_f, t - d_f + m_f]} u(\xi).$$

□

Definitie 109. *În Teorema 266, oricare dintre proprietăţile echivalente a), b), c) e numită* ***condiţia de consistenţă a întârzierilor mărginite*** *(CC_{BD}). Dacă una dintre ele este adevărată, obişnuim să spunem că sistemul (1.1) îndeplineşte CC_{BD} sau că numerele m_r, d_r, m_f, d_f îndeplinesc acestă condiţie.*

Observatie 110. *Dăm câteva cazuri particulare de îndeplinire a CC_{BD}, scrisă sub forma (1.3):*

a) $d_r = d_f = d$; CC_{BD} este îndeplinită sub forma $m_r \geq 0$, $m_f \geq 0$;

b) $m_r = d_r$ şi $m_f = d_f$; CC_{BD} ia forma $d_r \geq 0$, $d_f \geq 0$ şi e îndeplinită;

c) $m_r = m_f = 0$; CC_{BD} e echivalentă cu $d_r = d_f$.

Teoremă 267. *Fie $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$. Inegalitatea (1.1) defineşte o întârziere dacă şi numai dacă CC_{BD} este adevărată.*

Demonstraţie. *Dacă* Relaţia (1.1) defineşte o întârziere datorită faptului că cele două funcţii $\bigcap_{\xi \in [t - d_r, t - d_r + m_r]} u(\xi)$, $\bigcup_{\xi \in [t - d_f, t - d_f + m_f]} u(\xi)$ sunt întârzieri, precum şi datorită Teoremei 265.

Doar dacă Presupunerea că CC_{BD} e falsă înseamnă existenţa unui $u \in S$ neadmisibil, i.e. (1.1) nu defineşte un sistem. □

Definitie 110. *Date fiind numerele reale $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$ aşa încât $d_r - m_r \leq d_f$, $d_f - m_f \leq d_r$, întârzierea*

$$\bigcap_{\xi \in [t - d_r, t - d_r + m_r]} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t - d_f, t - d_f + m_f]} u(\xi),$$

notată $f_{BD}^{m_r, d_r, m_f, d_f}$, se numeşte ***proprietatea de mărginire****. m_r, m_f sunt* ***întârzierile inerţiale (crescătoare, descrescătoare)*** *(numite şi* ***praguri de anulare****); d_r, d_f sunt* ***marginile superioare (crescătoare, descrescătoare) ale întârzierilor de transport*** *(ale* ***întârzierilor de transmitere a tranziţiilor****), iar diferenţele $d_f - m_f$, respectiv $d_r - m_r$ sunt numite* ***marginile inferioare (crescătoare, descrescătoare) ale întârzierilor de transport*** *(ale* ***întârzierilor de transmitere a tranziţiilor****).*

DEFINITIE 111. *Se spune despre o întârziere f că este* ***mărginită*** *dacă există $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$ aşa încât CC_{BD} e satisfăcută şi f este o subîntârziere a lui $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$. Dacă $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$, spunem că f* ***satisface proprietatea de mărginire*** *$f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$.*

OBSERVATIE 111. *Dăm o interpretare întârzierilor mărginite, presupunând că intrarea e funcţia constantă. Atunci avem $\forall \lambda \in \mathbf{B}$, $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(\lambda) = \{\lambda\}$, ceea ce înseamnă că orice întârziere mărginită f are aceeaşi proprietate $\forall \lambda \in \mathbf{B}, \forall x \in f(\lambda), x(t) = \lambda$.*

Considerăm intrarea $u = \chi_{[0,\delta)}$, unde $\delta > 0$ e un parametru şi analizăm stările sistemului $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ în două situaţii, $\delta \leq m_r$ şi $\delta > m_r$.

a) $\delta \leq m_r$,

$$0 \leq x(t) \leq \chi_{[d_f - m_f, d_f + \delta)}(t).$$

a.1) $t \in (-\infty, d_f - m_f), x(t) = 0$; 1-impulsul nu s-a propagat de la intrare la stări,

a.2) $t \in [d_f - m_f, d_f + \delta), x(t) = 0$ şi $x(t) = 1$ sunt ambele posibile, 1-impulsul e posibil să se fi propagat la stări,

a.3) $t \in [d_f + \delta, \infty), x(t) = 0$, 1-impulsul de la intrare nu mai poate afecta stările.

b) $\delta > m_r$,

$$\chi_{[d_r, d_r - m_r + \delta)}(t) \leq x(t) \leq \chi_{[d_f - m_f, d_f + \delta)}(t).$$

b.1) $t \in (-\infty, d_f - m_f), x(t) = 0$; 1-impulsul nu s-a propagat la stări,

b.2) $t \in [d_f - m_f, d_r), x(t) = 0$ sau $x(t) = 1$; 1-impulsul e posibil să se fi propagat la stări,

b.3) $t \in [d_r, d_r - m_r + \delta), x(t) = 1$; 1-impulsul s-a propagat în mod cert de la intrare la stări,

b.4) $t \in [d_r - m_r + \delta, d_f + \delta), x(t) = 0$ sau $x(t) = 1$; 1-impulsul mai poate încă produce efecte,

b.5) $t \in [d_f + \delta, \infty), x(t) = 0$; 1-impulsul de la intrare nu mai poate influenţa stările.

Aici se adaugă observaţia duală rezultată prin luarea în considerare a intrării $u = \chi_{(-\infty,0) \cup [\delta,\infty)}$, precum şi faptul că stările unei subîntârzieri $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ pot parcurge doar unele dintre posibilităţile precedente.

TEOREMĂ 268. *Fie $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$ astfel încât CC_{BD} e îndeplinită. Pentru orice $u \in S$ şi orice $x \in S$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)$;

b) $\exists y \in S, x(t) = \bigcap\limits_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \cup y(t) \cdot \bigcup\limits_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi)$.

DEMONSTRAŢIE. *a)* $\Longrightarrow$ *b)* Se verifică faptul că pentru orice $t \in \mathbf{R}$ şi orice valori $\bigcap\limits_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = \bigcup\limits_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) = 0$; $\bigcap\limits_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = 0$, $\bigcup\limits_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) = 1$ şi $\bigcap\limits_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = \bigcup\limits_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) = 1$, din $x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)$ obţinem că

$$x(t) = \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \cup x(t) \cdot \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi).$$

b) $\Longrightarrow$ *a)* Pentru orice t şi orice $y \in S$ avem

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \cup y(t) \cdot \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) \leq$$

$$\leq \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \cup \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) = \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi).$$

□

2. Egalitatea dintre valorile iniţiale ale intrării şi ale stărilor

TEOREMĂ 269. *Se dau numerele* $0 \leq m_r \leq d_r, 0 \leq m_f \leq d_f$ *în aşa fel ca* CC_{BD} *să fie satisfăcută. Atunci* $\forall u \in S, \forall x \in f_{BD}^{m_r, d_r, m_f, d_f}(u)$, *avem* $x(-\infty + 0) = u(-\infty + 0)$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $u \in S$ şi $x \in f_{BD}^{m_r, d_r, m_f, d_f}(u)$ alese în mod arbitrar. Cazul $u(-\infty + 0) = 0$ este echivalent cu $\exists d \in \mathbf{R}, u(t) \leq \chi_{[d,\infty)}(t)$. În această situaţie avem

$$x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \chi_{[d,\infty)}(\xi) = \chi_{[d+d_f-m_f,\infty)}(t),$$

i.e. $x(-\infty + 0) = 0$.

Cazul $u(-\infty + 0) = 1$ este echivalent cu $\exists d \in \mathbf{R}, u(t) \geq \chi_{(-\infty,d)}(t)$, aşadar avem

$$x(t) \geq \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \geq \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} \chi_{(-\infty,d)}(\xi) = \chi_{(-\infty,d+d_r-m_r)}(t),$$

i.e. $x(-\infty + 0) = 1$. □

COROLAR 3. $f_{BD}^{m_r, d_r, m_f, d_f}$ *are stări iniţiale fără curse şi timp iniţial mărginit:*

$$\forall u \in S, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in f_{BD}^{m_r, d_r, m_f, d_f}(u), x_{|(-\infty,t_0)} = u(-\infty + 0).$$

DEMONSTRAŢIE. Prima afirmaţie e dedusă din Teorema 269, în timp ce a doua afirmaţie decurge din demonstraţia aceleiaşi teoreme. □

COROLAR 4. *Funcţia stare iniţială a lui* $f_{BD}^{m_r, d_r, m_f, d_f}$, $\phi_0 : S \to \mathbf{B}$ *este definită prin*

$$\forall u \in S, \phi_0(u) = u(-\infty + 0).$$

COROLAR 5. *Dacă* f *e o întârziere mărginită, atunci ea are stări iniţiale fără curse, timp iniţial mărginit şi funcţia sa stare iniţială* $\phi_0 : S \to \mathbf{B}$ *e definită prin*

$$\forall u \in S, \phi_0(u) = u(-\infty + 0).$$

DEMONSTRAŢIE. Ţinem cont de Corolarul 3 şi de Teorema 35; de Corolarul 3 şi de Teorema 37; de Corolarul 4 şi de Teorema 39. □

3. Ordinea

TEOREMĂ 270. *Fie* $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$ *şi* $0 \leq m'_r \leq d'_r$, $0 \leq m'_f \leq d'_f$ *aşa încât* CC_{BD} *e îndeplinită de fiecare dintre* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ *şi* $f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) avem

$$f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \subset f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f};$$

b) sunt adevărate următoarele inegalităţi

$$d'_r - m'_r \leq d_r - m_r \leq d_f \leq d'_f,$$

$$d'_f - m'_f \leq d_f - m_f \leq d_r \leq d'_r.$$

DEMONSTRAŢIE. a) e echivalentă cu $\forall u \in S, \forall t \in \mathbf{R}$,

$$\bigcap_{\xi \in [t-d'_r, t-d'_r+m'_r]} u(\xi) \leq \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq$$

$$\leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d'_f, t-d'_f+m'_f]} u(\xi)$$

ceea ce e echivalent cu valabilitatea următoarelor incluziuni

$$[t - d'_r, t - d'_r + m'_r] \supset [t - d_r, t - d_r + m_r],$$

$$[t - d_f, t - d_f + m_f] \subset [t - d'_f, t - d'_f + m'_f]$$

pentru toţi $t \in \mathbf{R}$ ceea ce e echivalent cu b), ţinând cont de CC_{BD}. □

OBSERVATIE 112. *Datorită afirmaţiei b) a teoremei precedente, din conjuncţia afirmaţiilor* $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ *şi* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \subset f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}$, *concluzionăm că:*

- dacă întârzierea mărginită f *are marginile superioare ale întârzierilor de transmisie a tranziţiilor* d_r, d_f, *atunci ea are de asemenea marginile superioare* d'_r, d'_f;

- dacă întârzierea mărginită f *are marginile inferioare ale întârzierilor de transmisie a tranziţiilor* $d_f - m_f$, $d_r - m_r$, *atunci ea are de asemenea marginile inferioare* $d'_f - m'_f$, $d'_r - m'_r$.

Pe de altă parte, dată fiind întârzierea mărginită f, *e interesant de studiat acea întârziere* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ *cu*

i) $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$

ii) pentru orice $f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}$ *astfel încât* $f \subset f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}$, *avem* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \subset f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}$

i.e. $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ *este cea mai mică proprietate de mărginire, în sensul incluziunii, care este satisfăcută de către* f.

TEOREMĂ 271. *Fie* $f, g : S \to P^*(S)$. *Dacă* $f \subset g$ *şi* g *e o întârziere mărginită, atunci* f *e o întârziere mărginită de asemenea.*

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că $g \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$, unde m_r, d_r, m_f, d_f satisfac CC_{BD}. Din Teorema 258, sistemul f e o întârziere. În mod evident, întârzierea e mărginită. □

4. Dualitatea

TEOREMĂ 272. *Întârzierea duală a lui* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ *este* $f_{BD}^{m_f,d_f,m_r,d_r}$.

DEMONSTRAŢIE. Observăm mai întâi că CC_{BD} pentru cele două sisteme este aceeaşi. Aşadar există întârzierea mărginită $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ dacă şi numai dacă există întârzierea mărginită $f_{BD}^{m_f,d_f,m_r,d_r}$. Demonstrăm dualitatea dintre cele două întârzieri. Avem:

$$\forall u \in S, (f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f})^*(u) =$$

$$= \{\overline{x} | \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} \overline{u(\xi)} \le x(t) \le \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}\} =$$

$$= \{\overline{x} | \overline{\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} \overline{u(\xi)}} \ge \overline{x(t)} \ge \overline{\bigcup_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}}\} =$$

$$= \{x | \bigcap_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi) \le x(t) \le \bigcup_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)\} = f_{BD}^{m_f,d_f,m_r,d_r}(u).$$

□

TEOREMĂ 273. *Dacă* f *este o întârziere mărginită, atunci* f^* *este şi ea o întârziere mărginită.*

DEMONSTRAŢIE. Incluziunea $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ implică

$$\forall u \in S, f^*(u) = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} \subset \{\overline{x} | x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(\overline{u})\} =$$

$$= (f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f})^*(u) = f_{BD}^{m_f,d_f,m_r,d_r}(u).$$

Dar acest lucru rezultă direct din Teoremele 49 şi 272 de asemenea, deoarece avem $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \Longleftrightarrow f^* \subset f_{BD}^{m_f,d_f,m_r,d_r}$. □

TEOREMĂ 274. *Sistemul* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ *e auto-dual dacă şi numai dacă* $d_r = d_f$ *şi* $m_r = m_f$.

DEMONSTRAŢIE. *Dacă* Evidentă.
Numai dacă Deoarece (1.1) şi

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi) \le x(t) \le \bigcup_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)$$

trebuie să aibe aceleaşi soluţii, deducem că $d_r = d_f$ şi $d_r - m_r = d_f - m_f$, i.e. afirmaţia teoremei. □

5. Legarea în serie

TEOREMĂ 275. *Fie numerele* $0 \le m_r \le d_r$, $0 \le m_f \le d_f$ *şi* $0 \le m'_r \le d'_r$, $0 \le m'_f \le d'_f$ *astfel încât* $d_r \ge d_f - m_f$, $d_f \ge d_r - m_r$ *şi* $d'_r \ge d'_f - m'_f$, $d'_f \ge d'_r - m'_r$ *sunt adevărate. Atunci* $f_{BD}^{m_r+m'_r,d_r+d'_r,m_f+m'_f,d_f+d'_f}$ *este o proprietate de mărginire şi avem*

$$f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f} \circ f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} = f_{BD}^{m_r+m'_r,d_r+d'_r,m_f+m'_f,d_f+d'_f}.$$

DEMONSTRAŢIE. Observăm că $d_f + d'_f \geq d_r + d'_r - m_r - m'_r$, $d_r + d'_r \geq d_f + d'_f - m_f - m'_f$, deci CC_{BD} e din nou îndeplinită şi $f_{BD}^{m_r+m'_r,d_r+d'_r,m_f+m'_f,d_f+d'_f}$ are sens.

Demonstrăm

$$f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f} \circ f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \subset f_{BD}^{m_r+m'_r,d_r+d'_r,m_f+m'_f,d_f+d'_f}.$$

Fie $u \in S$ şi $y \in (f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f} \circ f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f})(u)$ arbitrare, pentru care există $x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)$ aşa ca $y \in f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}(x)$. Următoarele afirmaţii

$$\bigcap_{\omega\in[\xi-d_r,\xi-d_r+m_r]} u(\omega) \leq x(\xi) \leq \bigcup_{\omega\in[\xi-d_f,\xi-d_f+m_f]} u(\omega), \tag{5.1}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d'_r,t-d'_r+m'_r]} x(\xi) \leq y(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d'_f,t-d'_f+m'_f]} x(\xi) \tag{5.2}$$

sunt adevărate pentru toţi $t \in \mathbf{R}$ şi toţi $\xi \in \mathbf{R}$, de unde obţinem

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r-d'_r,t-d_r-d'_r+m_r+m'_r]} u(\xi) = \bigcap_{\xi\in[t-d'_r,t-d'_r+m'_r]}\bigcap_{\omega\in[\xi-d_r,\xi-d_r+m_r]} u(\omega) \leq$$

$$\leq \bigcap_{\xi\in[t-d'_r,t-d'_r+m'_r]} x(\xi) \leq y(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d'_f,t-d'_f+m'_f]} x(\xi) \leq$$

$$\leq \bigcup_{\xi\in[t-d'_f,t-d'_f+m'_f]}\bigcup_{\omega\in[\xi-d_f,\xi-d_f+m_f]} u(\omega) = \bigcup_{\xi\in[t-d_f-d'_f,t-d_f-d'_f+m_f+m'_f]} u(\xi).$$

Aşadar $y \in f_{BD}^{m_r+m'_r,d_r+d'_r,m_f+m'_f,d_f+d'_f}(u)$.

Demonstrăm că

$$f_{BD}^{m_r+m'_r,d_r+d'_r,m_f+m'_f,d_f+d'_f} \subset f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f} \circ f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}.$$

Trebuie să arătăm că pentru $u \in S$ şi $y \in S$, ambele arbitrare şi fixate cu

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r-d'_r,t-d_r-d'_r+m_r+m'_r]} u(\xi) \leq y(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f-d'_f,t-d_f-d'_f+m_f+m'_f]} u(\xi), \tag{5.3}$$

există un $x \in S$ aşa încât (5.1), (5.2) să fie satisfăcute pentru toţi $t \in \mathbf{R}$ şi toţi $\xi \in \mathbf{R}$. Există $t_0 \in \mathbf{R}$ astfel încât $\forall y \in f_{BD}^{m_r+m'_r,d_r+d'_r,m_f+m'_f,d_f+d'_f}(u)$, $\forall x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)$, $\forall y' \in f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}(x)$, datorită Teoremei 269 avem

$$y_{|(-\infty,t_0)} = x_{|(-\infty,t_0)} = y'_{|(-\infty,t_0)} = u_{|(-\infty,t_0)} = u(-\infty+0).$$

Prin absurd, putem presupune că există $t_1 \geq t_0$ aşa încât proprietatea precedentă să fie adevărată pentru $t < t_1$ şi falsă pentru $t = t_1$. Presupunem că $y(t_1) = 0$. Din (5.3) avem

$$\bigcap_{\xi\in[t_1-d'_r,t_1-d'_r+m'_r]}\bigcap_{\omega\in[\xi-d_r,\xi-d_r+m_r]} u(\omega) = 0,$$

i.e.

$$\exists\xi_1 \in [t_1 - d'_r, t_1 - d'_r + m'_r], \bigcap_{\omega\in[\xi_1-d_r,\xi_1-d_r+m_r]} u(\omega) = 0.$$

Relaţia (5.1), scrisă pentru $\xi = \xi_1$, arată că putem alege $x(\xi_1) = 0$ şi (5.2), scrisă pentru $t = t_1$, are loc deoarece

$$\bigcap_{\xi \in [t_1 - d_r', t_1 - d_r' + m_r']} x(\xi) = x(\xi_1) = 0,$$

contradicţie cu presupunerea făcută asupra existenţei lui t_1. Acelaşi rezultat se obţine dacă presupunem că $y(t_1) = 1$. $\square$

TEOREMĂ 276. *Mulţimea întârzierilor mărginite este un monoid relativ la legarea în serie, al cărui unitate este I.*

DEMONSTRAŢIE. Din $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ şi $g \subset f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'}$, ţinând cont de Teoremele 74 şi 275, obţinem că

$$g \circ f \subset g \circ f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \subset f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'} \circ f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} = f_{BD}^{m_r+m_r',d_r+d_r',m_f+m_f',d_f+d_f'}.$$

Se vede că I aparţine monoidului, deoarece $I = f_{BD}^{0,0,0,0}$. $\square$

OBSERVATIE 113. *Dacă f este o întârziere arbitrară, atunci prin legarea sa în serie cu o întârziere mărginită se obţine în general o întârziere arbitrară (nu una mărginită).*

Combinăm acum ordinea proprietăţilor de mărginire din Teorema 270 cu Teorema 74 care dă compatibilitatea dintre legarea în serie şi ordine şi cu Teorema 275 relativă la legarea în serie $f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'} \circ f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ în următorul mod. Fie proprietăţile de mărginire $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$, $f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'}$ şi $f_{BD}^{m_r'',d_r'',m_f'',d_f''}$, unde $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$, $0 \leq m_r' \leq d_r'$, $0 \leq m_f' \leq d_f'$, $0 \leq m_r'' \leq d_r''$, $0 \leq m_f'' \leq d_f''$, aşa încât CC_{BD} e satisfăcută de trei ori. Implicaţia

$$f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'} \subset f_{BD}^{m_r'',d_r'',m_f'',d_f''} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'} \circ f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \subset f_{BD}^{m_r'',d_r'',m_f'',d_f''} \circ f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$$

înseamnă că

$$\begin{aligned} d_r'' - m_r'' &\leq d_r' - m_r' \leq d_f' \leq d_f'', \\ d_f'' - m_f'' &\leq d_f' - m_f' \leq d_r' \leq d_r'' \end{aligned}$$

implică

$$\begin{aligned} d_r + d_r'' - m_r - m_r'' &\leq d_r + d_r' - m_r - m_r' \leq d_f + d_f' \leq d_f + d_f'', \\ d_f + d_f'' - m_f - m_f'' &\leq d_f + d_f' - m_f - m_f' \leq d_r + d_r' \leq d_r + d_r''. \end{aligned}$$

Cealaltă situaţie

$$f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'} \subset f_{BD}^{m_r'',d_r'',m_f'',d_f''} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \circ f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'} \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \circ f_{BD}^{m_r'',d_r'',m_f'',d_f''}$$

este similară.

6. Intersecţia

TEOREMĂ 277. *Dacă numerele* $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$ *respectiv* $0 \leq m'_r \leq d'_r$, $0 \leq m'_f \leq d'_f$ *satisfac* CC_{BD} *de două ori:* $d_r \geq d_f - m_f$, $d_f \geq d_r - m_r$, *respectiv* $d'_r \geq d'_f - m'_f$, $d'_f \geq d'_r - m'_r$, *atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

$$\forall u \in S, f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u) \cap f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}(u) \neq \emptyset,$$

$$d_r \geq d'_f - m'_f,\ d'_f \geq d_r - m_r,\ d'_r \geq d_f - m_f,\ d_f \geq d'_r - m'_r.$$

Când una dintre ele este adevărată, atunci există $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \cap f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}$, *care de dată de*

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \cup \bigcap_{\xi \in [t-d'_r, t-d'_r+m'_r]} u(\xi) \leq x(t) \leq \tag{6.1}$$
$$\leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) \cdot \bigcup_{\xi \in [t-d'_f, t-d'_f+m'_f]} u(\xi).$$

DEMONSTRAŢIE. Arătăm prima afirmaţie. Pentru un $u \in S$ arbitrar putem scrie:

$$\exists x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u) \cap f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}(u) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \exists x \in S, \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) \text{ si}$$
$$\text{si} \bigcap_{\xi \in [t-d'_r, t-d'_r+m'_r]} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d'_f, t-d'_f+m'_f]} u(\xi)$$
$$\Longleftrightarrow \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) \text{ si}$$
$$\text{si} \bigcap_{\xi \in [t-d'_r, t-d'_r+m'_r]} u(\xi) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d'_f, t-d'_f+m'_f]} u(\xi) \text{ si}$$
$$\text{si} \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d'_f, t-d'_f+m'_f]} u(\xi) \text{ si}$$
$$\text{si} \bigcap_{\xi \in [t-d'_r, t-d'_r+m'_r]} u(\xi) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi)$$
$$\Longleftrightarrow d_r \geq d_f - m_f, d_f \geq d_r - m_r \text{ si } d'_r \geq d'_f - m'_f, d'_f \geq d'_r - m'_r \text{ si}$$
$$\text{si } d_r \geq d'_f - m'_f,\ d'_f \geq d_r - m_r \text{ si } d'_r \geq d_f - m_f,\ d_f \geq d'_r - m'_r$$
$$\Longleftrightarrow\ d_r \geq d'_f - m'_f,\ d'_f \geq d_r - m_r \text{ si } d'_r \geq d_f - m_f,\ d_f \geq d'_r - m'_r,$$

unde am ţinut cont de Teorema 266 şi de ipoteză.

A doua afirmaţie a teoremei e evidentă, insă putem face şi următorul raţionament. Fixăm în mod arbitrar $t \in \mathbf{R}, u \in S$ şi le dăm la $\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi)$, $\bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi)$, $\bigcap_{\xi \in [t-d'_r, t-d'_r+m'_r]} u(\xi)$, $\bigcup_{\xi \in [t-d'_f, t-d'_f+m'_f]} u(\xi)$ toate valorile posibile de la 0,0,0,0 la 1,1,1,1 în total şapte situaţii. În fiecare dintre ele valorile $x(t), x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u) \cap f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}(u)$ şi soluţiile $x(t)$ ale lui (6.1) coincid. $\square$

OBSERVATIE 114. *Întârzierea* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \cap f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'}$ *e mărginită, de exemplu* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \cap f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'} \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$, *dar nu e de forma* $f_{BD}^{m_r'',d_r'',m_f'',d_f''}$.

TEOREMĂ 278. *Dacă f este o întârziere mărginită şi $g : S \to P^*(S)$ e un sistem arbitrar aşa încât $\forall u \in S, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, atunci $f \cap g$ e o întârziere mărginită.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$ aşa încât CC_{BD} să fie satisfăcută şi să presupunem că $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$. Din ipoteză, $f \cap g$ e o întârziere şi, deoarece $f \cap g \subset f$, am obţinut că $f \cap g$ e mărginită. □

COROLAR 6. *Intersecţia întârzierilor mărginite e o întârziere mărginită.*

7. Reuniunea

TEOREMĂ 279. *Sunt date numerele $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f, 0 \leq m_r' \leq d_r'$, $0 \leq m_f' \leq d_f'$ aşa încât CC_{BD} e satisfăcută de două ori. Atunci există întârzierea $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \cup f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'}$ care e dată de dubla inegalitate*

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi) \cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_r',t-d_r'+m_r']} u(\xi) \leq x(t) \leq \tag{7.1}$$

$$\leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi) \cup \bigcup_{\xi\in[t-d_f',t-d_f'+m_f']} u(\xi).$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $t \in \mathbf{R}, u \in S$ arbitrare şi fixate. Dăm celor patru numere $\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)$, $\bigcup_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi)$, $\bigcap_{\xi\in[t-d_r',t-d_r'+m_r']} u(\xi)$, $\bigcup_{\xi\in[t-d_f',t-d_f'+m_f']} u(\xi)$ toate valorile posibile de la 0,0,0,0 la 1,1,1,1. Rezultatul e că s-au obţinut nouă situaţii. În fiecare dintre ele, valorile $x(t)$, $x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u) \cup f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'}(u)$ şi soluţiile $x(t)$ ale lui (7.1) coincid. □

OBSERVATIE 115. *Întârzierea* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \cup f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'}$ *nu e o proprietate de mărginire* $f_{BD}^{m_r'',d_r'',m_f'',d_f''}$, *însă e mărginită. O posibilitate de a alege* $f_{BD}^{m_r'',d_r'',m_f'',d_f''}$ *astfel ca* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \cup f_{BD}^{m_r',d_r',m_f',d_f'} \subset f_{BD}^{m_r'',d_r'',m_f'',d_f''}$ *e următoarea:*

$$d_r'' = d_f'' = m_r'' = m_f'' = \max\{d_r, d_f\} \overset{not}{=} d.$$

Într-adevăr, $\forall t \in \mathbf{R}$, *avem*

$$[t-d,t] \supset [t-d_r, t-d_r+m_r], [t-d,t] \supset [t-d_f, t-d_f+m_f],$$

$$[t-d,t] \supset [t-d_r', t-d_r'+m_r'], [t-d,t] \supset [t-d_f', t-d_f'+m_f'],$$

deci $\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in S$ *deducem că*

$$\bigcap_{\xi\in[t-d,t]} u(\xi) \leq \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi) \cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_r',t-d_r'+m_r']} u(\xi) \leq x(t) \leq$$

$$\leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi) \cup \bigcup_{\xi\in[t-d_f',t-d_f'+m_f']} u(\xi) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d,t]} u(\xi).$$

TEOREMĂ 280. *Reuniunea întârzierilor mărginite e o întârziere mărginită.*

DEMONSTRAŢIE. Din $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$, $g \subset f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}$ avem că $f \cup g \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \cup f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f} \subset f_{BD}^{m''_r,d''_r,m''_f,d''_f}$. Pe de altă parte am presupus că relaţiile de compatibilitate sunt îndeplinite pentru ambele întârzieri $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ şi $f_{BD}^{m'_r,d'_r,m'_f,d'_f}$. Parametrii $m''_r, d''_r, m''_f, d''_f$ pot fi aleşi ca în precedenta observaţie. □

8. Determinismul

TEOREMĂ 281. *Fie $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$ aşa încât CC_{BD} e satisfăcută. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ este determinist;

b) marginile superioară şi inferioară ale întârzierii de transport coincid

$$d_r = d_f - m_f,\ d_f = d_r - m_r;$$

c) întârzierile inerţiale sunt nule

$$m_r = m_f = 0;$$

d) proprietatea de mărginire degenerează într-o translaţie

$$\exists d \geq 0, f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} = I_d.$$

DEMONSTRAŢIE. a) $\Longrightarrow$ b) Ipoteza afirmă că $\forall u \in S$, $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)$ are exact un element:

$$\forall u \in S, \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi). \tag{8.1}$$

Dăm lui u valorile $\chi_{[0,\infty)}, \chi_{(-\infty,0)}$ şi obţinem

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} \chi_{[0,\infty)}(\xi) = \chi_{[d_r,\infty)}(t), \tag{8.2}$$

$$\bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \chi_{[0,\infty)}(\xi) = \chi_{[d_f-m_f,\infty)}(t), \tag{8.3}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} \chi_{(-\infty,0)}(\xi) = \chi_{(-\infty,d_r-m_r)}(t), \tag{8.4}$$

$$\bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \chi_{(-\infty,0)}(\xi) = \chi_{(-\infty,d_f)}(t). \tag{8.5}$$

Relaţia (8.1) implică egalitatea funcţiilor de la (8.2) şi (8.3) şi a funcţiilor de la (8.4) şi (8.5). Aceasta indică satisfacerea lui b).

b) $\Longrightarrow$ c) Adunăm termen cu termen cele două relaţii şi obţinem $m_r + m_f = 0$, de unde rezultă c).

c) $\Longrightarrow$ d) Din ipoteza c) şi din CC_{BD}, deducem $d_r \geq d_f$, $d_f \geq d_r$, i.e. $d_r = d_f = d$, iar (1.1) devine

$$u(t-d) \leq x(t) \leq u(t-d).$$

Cu alte cuvinte $f_{BD}^{0,d,0,d}(u) = u \circ \tau^d = I_d(u)$.

d) $\Longrightarrow$ a) Evident, deoarece I_d e determinist. □

COROLAR 7. *Orice întârziere mărginită f cu proprietatea că $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$, atunci când $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ satisface una dintre condiţiile a),...,d) din Teorema 281 este deterministă şi coincide cu I_d, unde am pus $d = d_r = d_f$.*

9. Invarianţa în timp

TEOREMĂ 282. *Sistemul $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ este invariant în timp.*

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $\forall d \in \mathbf{R}, \forall u \in S, \forall x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)$ avem

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} (u \circ \tau^d)(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi - d) = \bigcap_{\xi+d \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) =$$

$$= \bigcap_{\xi \in [t-d-d_r, t-d-d_r+m_r]} u(\xi) \leq x(t-d) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d-d_f, t-d-d_f+m_f]} u(\xi) =$$

$$= \bigcup_{\xi+d \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) = \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi - d) = \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} (u \circ \tau^d)(\xi),$$

deducem că

$$\{x \circ \tau^d | x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)\} \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u \circ \tau^d).$$

□

OBSERVATIE 116. *În general, întârzierile mărginite nu sunt invariante în timp. Un exemplu în acest sens este dat de întârzierea $f \subset f_{BD}^{1,2,1,2}$ definită prin*

$$\forall u \in S, f(u) = \begin{cases} f_{BD}^{1,2,1,2}(u), u \neq \chi_{[0,\infty)} \\ \chi_{[1,\infty)}, u = \chi_{[0,\infty)} \end{cases},$$

pentru care observăm că $\chi_{[1,\infty)} \in f_{BD}^{1,2,1,2}(\chi_{[0,\infty)})$, deci $f \subset f_{BD}^{1,2,1,2}$ intr-adevăr. Avem

$$f(\chi_{[0,\infty)} \circ \tau^1) = f(\chi_{[1,\infty)}) = \{x | \chi_{[3,\infty)}(t) \leq x(t) \leq \chi_{[2,\infty)}(t)\},$$
$$\{x \circ \tau^1 | x \in f(\chi_{[0,\infty)})\} = \chi_{[2,\infty)}.$$

10. Neanticipativitatea

TEOREMĂ 283. *Pentru orice numere $0 \leq m_r \leq d_r, 0 \leq m_f \leq d_f$ astfel încât CC_{BD} e satisfăcută, $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ este neanticipativ în sensul Definiţiei 63 şi a Definiţiei 65, punctele v),...,ix).*

DEMONSTRAŢIE. a) Demonstrăm neanticipaticitatea în sensul Definiţiei 63. Trebuie să arătăm că $\forall u \in S, \forall x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)$, avem:
a.1) x e constant
sau
a.2) u, x sunt variabile şi

$$\min\{t | u(t-0) \neq u(t)\} \leq \min\{t | x(t-0) \neq x(t)\}.$$

Dacă $u(-\infty + 0) = 0$, există un $d \in \mathbf{R}$ cu $u \leq \chi_{[d,\infty)}$ aşa încât obţinem

$$x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \chi_{[d,\infty)}(\xi) = \chi_{[d+d_f-m_f,\infty)}(t).$$

Dacă $u = 0$, avem că $x = 0$ şi a.1) e adevărată. Dacă $u \neq 0$, ori $x = 0$ şi a.1) e satisfăcută, ori $x \neq 0$ şi putem alege pe d în aşa fel ca

$$\min\{t|u(t-0) \neq u(t)\} = d \leq d + d_f - m_f \leq \min\{t|x(t-0) \neq x(t)\}$$

să fie adevărată, ceea ce arată satisfacerea lui a.2). Situaţia când $u(-\infty + 0) = 1$ e similară.

b) Arătăm neanticipativitatea în sensul Definiţiei 65 punctul ix): $\exists d$, $\exists d'$, $0 \leq d \leq d'$ şi

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in U, \forall v \in U, u_{|[t-d',t-d]} = v_{|[t-d',t-d]} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \{x(t)|x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)\} = \{y(t)|y \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(v)\}.$$

Într-adevăr, să luăm $d = 0, d' = \max\{d_r, d_f\}$ şi $t \in \mathbf{R}$ arbitrar. Deoarece

$$[t-d', t] \supset [t-d_r, t-d_r+m_r], [t-d', t] \supset [t-d_f, t-d_f+m_f],$$

deducem că

$$\forall u \in U, \forall v \in U, u_{|[t-d',t-d]} = v_{|[t-d',t-d]} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} v(\xi)$$

şi

$$\bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) = \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} v(\xi),$$

deci

$$\{x(t)|x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)\} = \{y(t)|y \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(v)\}.$$

□

TEOREMĂ 284. *Dacă $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ e o întârziere mărginită, atunci f este şi neanticipativă în sensul Definiţiei 63.*

DEMONSTRAŢIE. Acest fapt rezultă din Teorema 172. □

OBSERVATIE 117. *Uneori întârzierile mărginite sunt anticipative în alt sens al conceptului decât cel din Definiţia 63 şi întârzierea din Observaţia 116 dă un contraexemplu pentru anticipativitatea în sensul Definiţiei 65, v). Pentru intrările $\chi_{[0,\infty)}$ şi $\chi_{[0,3)}$ avem $\chi_{[0,\infty)|(-\infty,2]} = \chi_{[0,3)|(-\infty,2]}$, dar*

$$\{x_{|(-\infty,2]}|x \in f(\chi_{[0,\infty)})\} = \chi_{[1,\infty)|(-\infty,2]} \neq \{y_{|(-\infty,2]}|\chi_{[2,4)}(t) \leq y(t) \leq \chi_{[1,5)}(t)\} =$$
$$= \{y_{|(-\infty,2]}|y \in f(\chi_{[0,3)})\}.$$

11. Întârzieri fixe şi întârzieri inerţiale

COROLAR 8. *(al Teoremei 281) Proprietăţile de mărginire deterministe sunt date de ecuaţia*

$$x(t) = u(t-d), \tag{11.1}$$

în care $d \geq 0$; proprietăţile de mărginire nedeterministe constau în sistemul (1.1), unde $m_r + m_f > 0$.

DEFINITIE 112. *Pentru $u, x \in S$ şi $d \geq 0$, întârzierea (11.1) se numeşte (**condiţia**, **proprietatea**, **modelul de**) **întârziere fixă**. Alte denumiri acceptate sunt acelea de **întârziere pură**, **ideală**, sau **neinerţială**.*

*O întârziere diferită de cea fixă se numeşte **inerţială**.*

OBSERVATIE 118. *Pentru întârzierile fixă şi pură, Definiţiile informale 101, 102 coincid.*

În Definiţia 112 inerţia a fost definită ca fiind acea proprietate a întârzierilor de a diferi de întârzierea ideală. În particular întârzierile nedeterministe, ca de exemplu proprietăţile de mărginire pentru care $m_r + m_f > 0$*, sunt întârzieri inerţiale.*

Un caz particular în incluziunea din Teorema 270 a) constă în acea situaţie când întârzierea mărginită e fixă. Fie $d \in [d'_r - m'_r, d'_r] \cap [d'_f - m'_f, d'_f]$ *(punctul b) al acelei teoreme afirmă* $d \in [d'_r - m'_r, d'_f] \cap [d'_f - m'_f, d'_r]$ *şi se poate arăta că* $[d'_r - m'_r, d'_f] \cap [d'_f - m'_f, d'_r] = [d'_r - m'_r, d'_r] \cap [d'_f - m'_f, d'_f]$*); atunci din afirmaţiile*

$$\begin{aligned} t - d'_r &\leq t - d \leq t - d'_r + m'_r, \\ t - d'_f &\leq t - d \leq t - d'_f + m'_f, \end{aligned}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d'_r, t-d'_r+m'_r]} u(\xi) \leq u(t-d) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d'_f, t-d'_f+m'_f]} u(\xi)$$

concluzionăm că $I_d \subset f_{BD}^{m'_r, d'_r, m'_f, d'_f}$*, într-adevăr.*

Dăm acum câteva proprietăţi ale întârzierilor fixe.

Întârzierea I_d *are stări iniţiale fără curse, timp iniţial mărginit şi funcţia sa stare iniţială* $\phi_0 : S \to \mathbf{B}$ *e definită prin:* $\forall u \in S, \phi_0(u) = u(-\infty + 0)$*, Corolarul 5. Întârzierea* I_d *e auto-duală, Teorema 274. Inversa lui* I_d *e* I_{-d} *care, în general, e o întârziere dar nu una mărginită (e mărginită doar dacă* $d = 0$*). Legarea în serie a întârzierilor fixe e o întârziere fixă şi coincide cu compunerea translaţiilor: pentru* $d \geq 0, d' \geq 0$*, avem* $d + d' \geq 0$ *şi*

$$I_d \circ I_{d'} = I_{d'} \circ I_d = I_{d+d'},$$

caz particular al Teoremei 275. Întârzierea I_d *e invariantă în timp (Teorema 282) şi neanticipativă în sensul Definiţiei 63 şi al Definiţiei 65, v),...,ix) (Teorema 283).*

Întârzierea I_d *e de asemenea injectivă*

$$\forall u \in S, \forall v \in S, u \neq v \Longrightarrow I_d(u) \neq I_d(v),$$

$$\forall u \in S, \forall v \in S, u \neq v \Longrightarrow I_d(u) \cap I_d(v) = \emptyset$$

şi surjectivă

$$\forall x \in S, \exists u \in S, I_d(u) = x,$$

$$\exists t \in \mathbf{R}, \forall \lambda \in \mathbf{B}, \exists u \in S, I_d(u)(t) = \lambda.$$

12. Alte definiţii ale întârzierilor mărginite

TEOREMĂ 285. *Fie numerele* $d_r > 0, d_f > 0$*. Pentru orice* $u \in S$*, avem*

$$\lim_{m_r \nearrow d_r} \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} u(\xi),$$

$$\lim_{m_f \nearrow d_f} \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi) = \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} u(\xi).$$

DEMONSTRAŢIE. Demonstrăm prima relaţie. Fixăm în mod arbitrar $t \in R, u \in S$. Atunci există un $\varepsilon > 0$ cu

$$\forall \xi \in [t-\varepsilon, t), u(\xi) = u(t-0).$$

Pentru orice $m_r \in (d_r - \varepsilon, d_r)$, obţinem $u(t - d_r + m_r) = u(t-0)$, deci

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \cdot u(t-0) =$$

$$= \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r+m_r, t)} u(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} u(\xi).$$

A doua relaţie e demonstrată în mod similar. □

OBSERVATIE 119. *Prin utilizarea rezultatului precedent şi al Convenţiei din Observaţia 96, luăm limitele în (1.1) când* $m_r \nearrow d_r$ *şi* $m_f \nearrow d_f$. *Atunci dubla inegalitate devine*[2]

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} u(\xi). \tag{12.1}$$

Sistemul nu necesită vreo condiţie suplimentară de compatibilitate deoarece

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} u(\xi) \leq u(t-d) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} u(\xi)$$

e adevărată pentru orice $d \in (0, \min\{d_r, d_f\})$.

TEOREMĂ 286. *Pentru orice* $d_r > 0, d_f > 0$, *inegalitatea (12.1) defineşte o întârziere.*

DEMONSTRAŢIE. Inegalităţile (12.1), ca urmare a celor anterior discutate, definesc un sistem. Presupunem că $\exists \lambda \in \mathbf{B}$, aşa încât $u \in S_c(\lambda)$ i.e. $\exists t_f \in \mathbf{R}, u_{|[t_f, \infty)} = \lambda$. Deoarece $\bigcap_{\xi \in [\cdot\, - d_r, \cdot\,)} u(\xi)_{|[t_f + d_r, \infty)} = \bigcup_{\xi \in [\cdot\, - d_f, \cdot\,)} u(\xi)_{|[t_f + d_f, \infty)} = \lambda$, avem că orice $x \in S$ care satisface (12.1) aparţine lui $S_c(\lambda)$. □

DEFINITIE 113. *Se dau numerele* $d_r > 0, d_f > 0$. *Întârzierea*

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} u(\xi)$$

*se numeşte **proprietatea de mărginire** şi se notează prin* $f_{BD'}^{d_r, d_f}$. *Parametrii* d_r, d_f *sunt **marginile superioare (crescătoare, descrescătoare) ale întârzierilor de transport** (**ale întârzierilor de transmitere a tranziţiilor**).*

DEFINITIE 114. *O întârziere* f *se numeşte **mărginită** dacă există* $d_r > 0, d_f > 0$ *astfel încât* $f \subset f_{BD'}^{d_r, d_f}$.

OBSERVATIE 120. *O altă denumire pentru* $f \subset f_{BD'}^{d_r, d_f}$ *poate fi aceea de **întârziere superior mărginită, inferior nemărginită**.*

În general, proprietăţile lui $f_{BD'}^{d_r, d_f}$ *repetă proprietăţile lui* $f_{BD}^{m_r, d_r, m_f, d_f}$. *De exemplu* $f_{BD'}^{d_r, d_f} \subset f_{BD'}^{d'_r, d'_f}$ *e echivalentă cu* $d_f \leq d'_f, d_r \leq d'_r$; *duala lui* $f_{BD'}^{d_r, d_f}$ *este*

[2]Aceasta este doar o posibilă interpretare a acelei Convenţii, când m_r, m_f şi d_r, d_f nu sunt egale, ci infinit de apropiate.

$f_{BD'}^{d_f,d_r}$ *şi auto-dualitatea înseamnă* $d_r = d_f$; $f_{BD'}^{d'_r,d'_f} \circ f_{BD'}^{d_r,d_f} = f_{BD'}^{d_r+d'_r,d_f+d'_f}$ *şi aşa mai departe.*

Desigur, se pot defini şi alte variante ale conceptului de întârziere mărginită, pornind de la proprietăţile

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi), \tag{12.2}$$

$$u(t-0) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi), \tag{12.3}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} u(\xi), \tag{12.4}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq x(t) \leq u(t-0) \tag{12.5}$$

unde, în principiu, $0 \leq m_r \leq d_r, 0 \leq m_f \leq d_f$ *rămân adevărate. Relaţia (12.3) a rezultat prin trecerea la limtă în (12.2) când* $d_r \searrow 0$. *În mod similar, (12.5) a rezultat prin trecerea la limită în (12.4) când* $d_f \searrow 0$. *De exemplu, (12.3) are soluţii dacă şi numai dacă e de forma*

$$u(t-0) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t]} u(\xi),$$

unde $d_f > 0$.

CAPITOLUL 12

Întârzieri absolut inerţiale

Fie parametrii $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$. Întârzierea f este absolut inerţială dacă $\forall u \in U, \forall x \in f(u)$ după ce x comută de la 0 la 1, rămâne egal cu 1 mai mult decât δ_r unităţi de timp şi în mod dual după ce x comută de la 1 la 0, rămâne egal cu 0 mai mult decât δ_f unităţi de timp. Tipul acesta de inerţie a fost numit 'absolut' deoarece proprietatea e independentă de intrarea u. În capitol se dau mai multe definiţii ale întârzierilor absolut inerţiale împreună cu proprietăţile lor. O versiune a inerţiei absolute e indicată la sfârşitul capitolului împreună cu 'zenoness', fenomenul care reprezintă, într-un anumit sens, absenţa inerţiei absolute.

1. Prima definiţie a întârzierilor absolut inerţiale

Teoremă 287. *Se dau numerele $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$. Când $x \in S$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1.1)
$$\begin{aligned} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) &\leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r]} x(\xi), \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} &\leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_f]} \overline{x(\xi)}; \end{aligned}$$

(1.2)
$$\begin{aligned} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) &\leq \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r]} x(\xi), \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} &\leq x(t-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_f]} \overline{x(\xi)}; \end{aligned}$$

(1.3)
$$\begin{aligned} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) &= \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r]} x(\xi), \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} &= x(t-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_f]} \overline{x(\xi)}; \end{aligned}$$

$\forall t \in \mathbf{R}, \forall t' \in \mathbf{R}$,

(1.4)
$$\begin{aligned} (t &< t' \; si \; \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 1 \; si \; x(t'-0) \cdot \overline{x(t')} = 1) \Longrightarrow t' - t > \delta_r, \\ (t &< t' \; si \; x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 1 \; si \; \overline{x(t'-0)} \cdot x(t') = 1) \Longrightarrow t' - t > \delta_f; \end{aligned}$$

(1.5)
$$\begin{aligned} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) &\leq \overline{x(t-\delta_f-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t)} \overline{x(\xi)}, \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} &\leq x(t-\delta_r-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t)} x(\xi). \end{aligned}$$

Demonstraţie. (1.1) $\Longrightarrow$ (1.2) Ambii termeni ai primei inegalităţi din (1.1) se multiplică cu $\overline{x(t-0)}$ şi rezultă prima inegalitate din (1.2).

(1.2) $\Longrightarrow$ (1.1) Din prima inegalitate a lui (1.2) obţinem prima inegalitate a lui (1.1):

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_r]} x(\xi) \leq \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_r]} x(\xi).$$

(1.1) $\Longrightarrow$ (1.3) În următoarele inegalităţi

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_r]} x(\xi) \leq x(t),$$

care se obţin din prima inegalitate (1.1), multiplicăm toţi termenii prin $\overline{x(t-0)}$ şi obţinem prima inegalitate (1.3).

(1.3) $\Longrightarrow$ (1.1) Prima inegalitate (1.3) implică prima inegalitate (1.1):

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_r]} x(\xi) \leq \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_r]} x(\xi).$$

(1.1) $\Longrightarrow$ (1.4) Fie t, t' arbitrare, astfel încât

$$t < t' \ si \ \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 1 \ si \ x(t'-0) \cdot \overline{x(t')} = 1.$$

(1.1) afirmă că $\bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_r]} x(\xi) = 1$ şi $\bigcap_{\xi \in [t',t'+\delta_f]} \overline{x(\xi)} = 1$, aşadar $[t, t+\delta_r] \cap [t', t'+\delta_f] = \emptyset$, de unde $t + \delta_r < t'$. Concluzia este că $t' - t > \delta_r$. Prima implicaţie (1.4) a fost demonstrată.

(1.4) $\Longrightarrow$ (1.1) Să presupunem că prima inegalitate a lui (1.1) nu e adevărată, i.e. există $t \in \mathbf{R}$ cu

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 1 \ si \ \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_r]} x(\xi) = 0,$$

ceea ce înseamnă existenţa lui $t' \in (t, t+\delta_r]$, unde x comută de la 1 la 0

$$x(t'-0) \cdot \overline{x(t')} = 1.$$

Avem $t' - t \leq \delta_r$, contradicţie cu prima implicaţie de la (1.4).

(1.4) $\Longrightarrow$ (1.5) Dacă prima inegalitate a lui (1.5) nu este adevărată, atunci există $t' \in \mathbf{R}$ aşa încât

$$\overline{x(t'-0)} \cdot x(t') = 1 \ si \ \overline{x(t'-\delta_f-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t'-\delta_f,t')} \overline{x(\xi)} = 0.$$

Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $t \in [t' - \delta_f - \varepsilon, t')$ cu

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 1.$$

Inegalitatea $t' - \delta_f - \varepsilon \leq t$, care e adevărată pentru toţi $\varepsilon > 0$, dă $t' - t \leq \delta_f$. Aşadar cea de-a doua implicaţie (1.4) nu este adevărată.

(1.5) $\Longrightarrow$ (1.4) Să luăm două numere t, t', aşa ca

$$t < t' \ si \ \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 1 \ si \ x(t'-0) \cdot \overline{x(t')} = 1,$$

ceea ce implică

$$\overline{x(t-\delta_f-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f,t)} \overline{x(\xi)} = 1 \ si \ x(t'-\delta_r-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t'-\delta_r,t')} x(\xi) = 1.$$

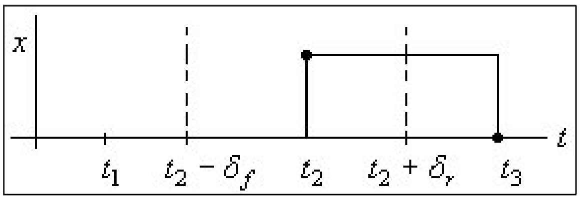

FIGURA 1. Interpretarea inerţiei absolute

Cu alte cuvinte, există $\varepsilon_1 > 0$ şi $\varepsilon_2 > 0$ cu proprietatea

$$\forall \xi \in [t - \delta_f - \varepsilon_1, t), x(\xi) = 0,$$

$$\forall \xi \in [t' - \delta_r - \varepsilon_2, t'), x(\xi) = 1,$$

$$[t - \delta_f - \varepsilon_1, t) \cap [t' - \delta_r - \varepsilon_2, t') = \emptyset.$$

Ultima intersecţie vidă conduce la concluzia că

$$t \leq t' - \delta_r - \varepsilon_2$$

e adevărată, i.e. $t' - t \geq \delta_r + \varepsilon_2 > \delta_r$ (cealaltă posibilitate $t' \leq t - \delta_f - \varepsilon_1$ e falsă pentru că în inegalitatea $t' - t \leq -\delta_f - \varepsilon_1$ termenul stâng e pozitiv şi termenul drept e negativ). Am demonstrat prima implicaţie a lui (1.4). □

DEFINITIE 115. *Sistemul autonom $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \subset S$ definit prin oricare din proprietăţile echivalente (1.1),...,(1.5) e numit* ***proprietatea de inerţie absolută****. Numerele δ_r, δ_f se numesc* ***parametrii inerţiali (crescător, descrescător)****. Când $\delta_r = \delta_f = 0$, proprietatea $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ e numită* ***trivială****, altfel spunem că e* ***netrivială****.*

OBSERVATIE 121. *Inerţia absolută e proprietatea semnalelor de a-şi ţine valoarea constantă mai mult decât un timp dat după fiecare comutare. Ele se caracterizează printr-o anumită lentoare. Această interpretare se vede în Figura 1. Să remarcăm modul în care comutarea $\overline{x(t_2 - 0)} \cdot x(t_2) = 1$ asigură în versiunea (1.1) că x va rămâne 1 un interval de timp de lungime $t_3 - t_2 > \delta_r$ în timp ce în versiunea (1.5) asigură că x a rămas 0 un interval de timp de lungime $t_2 - t_1 > \delta_f$. Când t parcurge $\mathbf{R}$, cele două proprietăţi sunt echivalente.*

Să mai observăm felul cum oricare dintre (1.1),...,(1.5) degenerează în situaţia trivială $\delta_r = \delta_f = 0 : f_{AI}^{0,0} = S$. Se văd de asemenea situaţiile intermediare când una dintre $\delta_r > 0, \delta_f = 0$ şi $\delta_r = 0, \delta_f > 0$ este adevărată, iar incluziunile $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \subset S$ sunt stricte.

Mulţimea $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ nu e închisă sub legile Boolene dacă $\delta_r > 0$ sau $\delta_f > 0$. De exemplu $\chi_{[0,2)}, \chi_{[1,3)} \in f_{AI}^{1,0}$, însă $\chi_{[0,2)} \cdot \chi_{[1,3)} = \chi_{[1,2)} \notin f_{AI}^{1,0}$.

Pentru orice $\delta_r \geq 0$, $\delta_f \geq 0$ şi $x \in S$, există un $t_0 \in \mathbf{R}$ aşa ca pentru $t < t_0$ oricare dintre (1.1),...,(1.5) e satisfăcută deoarece $\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 0$. Această proprietate reprezintă compatibilitatea dintre inerţia absolută şi modalitatea de definire a semnalelor. Ea e oarecum similară faptului că la întârzierile absolute am avut $\forall u \in S, \forall x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(u)$, $x(-\infty + 0) = u(-\infty + 0)$.

DEFINITIE 116. *Întârzierea f e numită* ***absolut inerţială*** *dacă există $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$ aşa încât*

$$\forall u \in S, f(u) \subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}.$$

Spunem uneori că f ***satisface proprietatea de inerţie absolută*** $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$.

TEOREMĂ 288. *Fie* f *o întârziere şi* $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$, *aşa încât* $\forall u \in S, f(u) \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \neq \emptyset$. *Atunci* f *defineşte întârzierea absolut inerţială* $f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$.

DEMONSTRAŢIE. Relaţia $f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \subset f$ arată că $f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ e o întârziere, în timp ce relaţia $f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ arată că întârzierea e absolut inerţială. □

DEFINITIE 117. *Întârzierea* $f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *definită în condiţiile teoremei precedente se numeşte* ***întârzierea absolut inerţială indusă de*** f.

OBSERVATIE 122. *Intuitiv vorbind, spunem că întârzierea absolut inerţială* f *exprimă o relaţie cauză-efect între o intrare şi o familie de stări inerţiale, aşa încât pentru orice* $u \in S$, *variaţiile semnalului întârziat* $x \in f(u)$ *nu pot fi mai rapide decât o permite îndeplinirea lui* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$.

Deoarece $f_{AI}^{0,0} = S$, *fiecare întârziere* f *e absolut inerţială în mod trivial:* $f \subset f_{AI}^{0,0}$.

2. Ordinea

TEOREMĂ 289. *Date fiind numerele nenegative* $\delta_r, \delta_f, \delta'_r, \delta'_f$, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \subset f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$;

b) $\delta_r \geq \delta'_r$ *şi* $\delta_f \geq \delta'_f$.

DEMONSTRAŢIE. În (1.1), $\bigcap\limits_{\xi \in [t,t+\delta_r]} x(\xi) \leq \bigcap\limits_{\xi \in [t,t+\delta'_r]} x(\xi)$ e adevărată pentru toţi $x \in S$ dacă şi numai dacă $[t, t+\delta_r] \supset [t, t+\delta'_r]$, ceea ce înseamnă că $\delta_r \geq \delta'_r$. Similar pentru $\delta_f \geq \delta'_f$. □

OBSERVATIE 123. *Din teorema precedentă şi din conjuncţia afirmaţiilor* $f \subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *şi* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \subset f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$ *concluzionăm că dacă întârzierea* f *are proprietatea* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$, *atunci ea are de asemenea proprietatea* $f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$, *ori de câte ori* $\delta_r \geq \delta'_r$ *şi* $\delta_f \geq \delta'_f$.

Pe de altă parte, fie întârzierea absolut inerţială f *cu* $\exists \delta_r \geq 0, \exists \delta_f \geq 0, f \subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$. *E interesant de studiat acea proprietatea* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *care satisface*

i) $f \subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$

ii) pentru orice $f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$ *cu* $f \subset f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$ *avem* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \subset f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$

i.e. $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *este cea mai mică proprietate de inerţie absolută în sensul incluziunii care e satisfăcută de* f.

COROLAR 9. *Dacă* $g \subset f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$ *e o întârziere absolut inerţială, atunci pentru orice subîntârziere* $f \subset g$, *există* $\delta_r \geq \delta'_r$ *şi* $\delta_f \geq \delta'_f$ *astfel încât* $f \subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$.

3. Dualitatea

TEOREMĂ 290. *Fie* $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$. *Sistemul dual al lui* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *este* $f_{AI}^{\delta_f,\delta_r}$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $u \in S$, avem

$$(f_{AI}^{\delta_r,\delta_f})^*(u) = \{\overline{x} | \overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_r]} x(\xi), x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_f]} \overline{x(\xi)}\} =$$

$$= \{x | \overline{\overline{x(t-0)}} \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r]} \overline{x(\xi)}, \overline{x(t-0)} \cdot \overline{\overline{x(t)}} \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_f]} \overline{\overline{x(\xi)}}\} =$$

$$= \{x | x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r]} \overline{x(\xi)}, \overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_f]} x(\xi)\} = f_{AI}^{\delta_f, \delta_r}(u).$$

□

TEOREMĂ 291. *Presupunem că* $f \subset f_{AI}^{\delta_r, \delta_f}$ *e o întârziere absolut inerţială. Atunci* $f^* \subset f_{AI}^{\delta_f, \delta_r}$ *e o întârziere absolut inerţială.*

DEMONSTRAŢIE. Din Teorema 261, f^* e o întârziere. Incluziunea $f^* \subset f_{AI}^{\delta_f, \delta_r}$ e o consecinţă a Teoremei 49 şi de asemenea a teoremei precedente. Totuşi, putem arăta afirmaţia şi în mod direct:

$$\forall u \in S, f^*(u) = \{\overline{x} | x \in f(\overline{u})\} \subset \{\overline{x} | x \in f_{AI}^{\delta_r, \delta_f}\} = \{x | \overline{x} \in f_{AI}^{\delta_r, \delta_f}\} = f_{AI}^{\delta_f, \delta_r}.$$

□

TEOREMĂ 292. *Proprietatea* $f_{AI}^{\delta_r, \delta_f}$ *e auto-duală dacă şi numai dacă* $\delta_r = \delta_f$.

DEMONSTRAŢIE. *Dacă* e evidentă.

Numai dacă Din $f_{AI}^{\delta_r, \delta_f} \subset f_{AI}^{\delta_f, \delta_r}$ deducem (vezi Teorema 289) că $\delta_r \geq \delta_f, \delta_f \geq \delta_r$. □

4. Legarea în serie

TEOREMĂ 293. *Fie întârzierile* f, g. *Incluziunea* $f \subset f_{AI}^{\delta_r, \delta_f}$ *implică* $f \circ g \subset f_{AI}^{\delta_r, \delta_f}$. *În particular, legarea în serie a întârzierilor absolut inerţiale cu parametrii* δ_r, δ_f *e o întârziere absolut inerţială cu parametrii* δ_r, δ_f.

DEMONSTRAŢIE. Evidentă. □

5. Intersecţia

TEOREMĂ 294. *Fie numerele nenegative* $\delta_r, \delta_f, \delta'_r, \delta'_f$. *Avem:*

$$f_{AI}^{\delta_r, \delta_f} \cap f_{AI}^{\delta'_r, \delta'_f} = f_{AI}^{\max\{\delta_r, \delta'_r\}, \max\{\delta_f, \delta'_f\}}. \tag{5.1}$$

DEMONSTRAŢIE. Fie t_0 astfel încât $\overline{x(t_0 - 0)} \cdot x(t_0) = 1$. Dacă inegalităţile

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r]} x(\xi),$$

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta'_r]} x(\xi)$$

sunt ambele adevărate, deducem

$$1 = \bigcap_{\xi \in [t_0, t_0+\delta_r]} x(\xi) \cdot \bigcap_{\xi \in [t_0, t_0+\delta'_r]} x(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t_0, t_0+\max\{\delta_r, \delta'_r\}]} x(\xi)$$

şi, similar, dacă t_1 e ales astfel ca $x(t_1 - 0) \cdot \overline{x(t_1)} = 1$ să aibe loc, inegalităţile

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_f]} \overline{x(\xi)},$$

$$x(t-0)\cdot\overline{x(t)}\leq\bigcap_{\xi\in[t,t+\delta'_f]}\overline{x(\xi)}$$

fiind ambele satisfăcute, e adevărat că

$$1=\bigcap_{\xi\in[t_1,t_1+\delta_f]}\overline{x(\xi)}\cdot\bigcap_{\xi\in[t_1,t_1+\delta'_f]}\overline{x(\xi)}=\bigcap_{\xi\in[t_1,t_1+\max\{\delta_f,\delta'_f\}]}\overline{x(\xi)}.$$

Am demonstrat incluziunea

$$f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}\subset f_{AI}^{\max\{\delta_r,\delta'_r\},\max\{\delta_f,\delta'_f\}}.$$

Pe de altă parte, incluziunile $f_{AI}^{\max\{\delta_r,\delta'_r\},\max\{\delta_f,\delta'_f\}}\subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$, $f_{AI}^{\max\{\delta_r,\delta'_r\},\max\{\delta_f,\delta'_f\}}\subset f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$ se deduc din Teorema 289. Aşadar

$$f_{AI}^{\max\{\delta_r,\delta'_r\},\max\{\delta_f,\delta'_f\}}\subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}.$$

□

TEOREMĂ 295. *Fie* $f\subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *o întârziere absolut inerţială şi* $g:S\to P^*(S)$ *un sistem. Dacă* $\forall u\in S, f(u)\cap g(u)\neq\emptyset$, *atunci* $f\cap g\subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *e o întârziere absolut inerţială.*

DEMONSTRAŢIE. Din Teorema 258 deducem că $f\cap g$ e o întârziere şi avem $f\cap g\subset f\subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$. □

TEOREMĂ 296. *Fie întârzierile absolut inerţiale* $f\subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}, g\subset f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$ *şi presupunem că* $\forall u\in S, f(u)\cap g(u)\neq\emptyset$. *Întârzierea* $f\cap g$ *a absolut inerţială cu* $f\cap g\subset f_{AI}^{\max\{\delta_r,\delta'_r\},\max\{\delta_f,\delta'_f\}}$.

DEMONSTRAŢIE. Intersecţia $f\cap g$ e o întârziere care satisface $f\cap g\subset f\subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ şi $f\cap g\subset g\subset f_{AIC}^{\delta'_r,\delta'_f}$. Din aceasta obţinem că $f\cap g\subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}=f_{AI}^{\max\{\delta_r,\delta'_r\},\max\{\delta_f,\delta'_f\}}$. Am ţinut cont de (5.1). □

TEOREMĂ 297. *Pentru toţi* $\delta_r\geq 0,\delta_f\geq 0$ *intersecţia* $f_{UD}\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *e o întârziere şi următoarea proprietate de legare în serie*

$$(f_{UD}\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f})\circ(f_{UD}\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f})=f_{UD}\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$$

e adevărată, unde $\delta'_r\geq 0,\delta'_f\geq 0$.

DEMONSTRAŢIE. Fie un $u\in S$ oarecare. Dacă $\exists\lambda\in\mathbf{B}, u\in S_c(\lambda)$, atunci $\lambda\in f_{UD}(u)\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ şi dacă $u\in S\setminus S_c$, atunci $f_{UD}(u)\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}=S\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}=f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}\neq\emptyset$. Am demonstrat că $\forall\delta_r\geq 0,\forall\delta_f\geq 0,\forall u\in S, f_{UD}(u)\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}\neq\emptyset$. Aşadar, pentru orice $\delta_r\geq 0,\delta_f\geq 0$, $f_{UD}\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ e o funcţie $S\to P^*(S)$ care e o întârziere deoarece e inclusă în f_{UD}.

Avem

$$((f_{UD}\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f})\circ(f_{UD}\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}))(u)=\bigcup_{x\in(f_{UD}\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f})(u)}(f_{UD}\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f})(x)=$$

$$= f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \cap \bigcup_{x\in f_{UD}(u)\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}} f_{UD}(x) = f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \cap \begin{cases} \bigcup_{x\in S_c(0)\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}} f_{UD}(x), u\in S_c(0) \\ \bigcup_{x\in S_c(1)\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}} f_{UD}(x), u\in S_c(1) \\ \bigcup_{x\in S\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}} f_{UD}(x), u\in S\setminus S_c \end{cases} =$$

$$= f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \cap \begin{cases} \bigcup_{x\in S_c(0)\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}} S_c(0), u\in S_c(0) \\ \bigcup_{x\in S_c(1)\cap f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}} S_c(1), u\in S_c(1) \\ \bigcup_{x\in f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}} S, u\in S\setminus S_c \end{cases} = f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \cap \begin{cases} S_c(0), u\in S_c(0) \\ S_c(1), u\in S_c(1) \\ S, u\in S\setminus S_c \end{cases} =$$

$$= (f_{UD} \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f})(u).$$

□

TEOREMĂ 298. *Fie întârzierile f, g şi numerele $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$, aşa ca $\forall u \in S, f(u) \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \neq \emptyset$. E adevărată formula*

$$(f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}) \circ g = (f \circ g) \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}.$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $u \in S$ obţinem

$$((f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}) \circ g)(u) = \{y | \exists x, y \in f(x) \ si \ y \in f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \ si \ x \in g(u)\} =$$

$$= ((f \circ g) \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f})(u).$$

□

6. Reuniunea

TEOREMĂ 299. *Pentru orice numere $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0, \delta'_r \geq 0, \delta'_f \geq 0$, avem*

$$f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \cup f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f} = f_{AI}^{\min\{\delta_r,\delta'_r\},\min\{\delta_f,\delta'_f\}}. \tag{6.1}$$

DEMONSTRAŢIE. Similară cu demonstraţia Teoremei 294. □

TEOREMĂ 300. *Date fiind întârzierile absolut inerţiale $f \subset f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ şi $g \subset f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$, întârzierea $f \cup g$ e absolut inerţială cu $f \cup g \subset f_{AI}^{\min\{\delta_r,\delta'_r\},\min\{\delta_f,\delta'_f\}}$.*

DEMONSTRAŢIE. Întârzierea $f \cup g$ este inclusă în $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \cup f_{AI}^{\delta'_r,\delta'_f}$ şi ţinem cont de (6.1). □

7. Invarianţa în timp

TEOREMĂ 301. *Pentru orice* $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$ *sistemul* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *e invariant în timp.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $u \in S$ şi $d \in \mathbf{R}$ arbitrare. Avem că (1.1) şi

$$\overline{x(t+d-0)} \cdot x(t+d) \leq \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_r]} x(\xi + d),$$

$$x(t+d-0) \cdot \overline{x(t+d)} \leq \bigcap_{\xi \in [t,t+\delta_f]} \overline{x(\xi + d)}$$

sunt echivalente (în sensul că au aceleaşi soluţii), de unde

$$f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}(u \circ \tau^d) = f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} = \{x | x \circ \tau^{-d} \in f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}\} = \{x \circ \tau^d | x \in f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}\}.$$

□

TEOREMĂ 302. *Fie* f *o întârziere invariantă în timp şi să presupunem că proprietatea* $\forall u \in S, f(u) \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \neq \emptyset$ *e satisfăcută. Atunci întârzierea indusă* $f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *este invariantă în timp.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $u \in S$ şi $d \in \mathbf{R}$ arbitrare. Din teorema anterioară avem

$$(f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f})(u \circ \tau^d) = f(u \circ \tau^d) \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} = \{x \circ \tau^d | x \in f(u)\} \cap \{x \circ \tau^d | x \in f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}\} =$$

$$= \{x \circ \tau^d | x \in f(u) \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}\} = \{x \circ \tau^d | x \in (f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f})(u)\}.$$

Aceeaşi afirmaţie decurge din faptul că $f \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ e o subîntârziere a lui f, care e invariantă în timp ca intersecţie de sisteme invariante în timp (Teorema 168). □

8. Exemple de întârzieri absolut inerţiale

TEOREMĂ 303. $I_d \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}, d \in \mathbf{R}$ *este o întârziere absolut inerţială doar pentru* $\delta_r = \delta_f = 0$.

DEMONSTRAŢIE. Presupunem prin absurd că există $\delta_r > 0$ cu $\forall u \in S, I_d(u) \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f} \neq \emptyset$. Intrarea $u = \chi_{[0,\delta)}$, unde $0 < \delta \leq \delta_r$, satisface proprietatea

$$I_d(u) = \chi_{[0,\delta)} \circ \tau^d \notin f_{AI}^{\delta_r,\delta_f},$$

contradicţie. Situaţia e similară dacă presupunem că există $\delta_f > 0$ aşa încât $I_d \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ e o întârziere absolut inerţială. □

EXEMPLU 104. *Cele două întârzieri deterministe din Exemplul 98 la fel ca şi următoarele întârzieri nederministe*

$$f(u) = \begin{cases} \{1\} \cup \{\chi_{[d,\infty)} | d \in \mathbf{R}\}, \ dac\breve{a}\ u \in S_c(1) \\ \{0\} \cup \{\chi_{(-\infty,d)} | d \in \mathbf{R}\}, \ altfel \end{cases},$$

$$f(u) = \begin{cases} \{0\} \cup \{\chi_{(-\infty,d)} | d \in \mathbf{R}\}, \ dac\breve{a}\ u \in S_c(0) \\ \{1\} \cup \{\chi_{[d,\infty)} | d \in \mathbf{R}\}, \ altfel \end{cases}$$

satisfac $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ *pentru toţi* $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$.

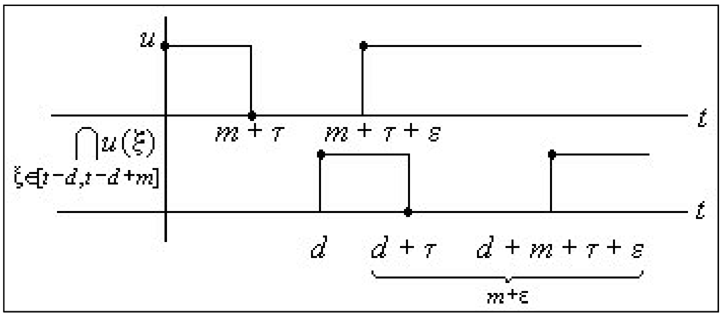

FIGURA 2. Întârziere deterministă, Teorema 304 a)

TEOREMĂ 304. *Fie $0 \leq m \leq d$.*
a) Întârzierea deterministă (din Exemplul 101)

$$x(t) = \bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m]} u(\xi)$$

satisface $x \in f_{AI}^{0,m}$ şi pentru orice δ_r, δ_f aşa încât $\delta_r > 0$ sau $\delta_f > m$, există un $u \in S$ cu $x \notin f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$. Cu alte cuvinte $0, m$ sunt cele mai mari valori pe care δ_r, δ_f le pot lua şi care fac adevărată $\forall u \in S, x \in f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$.
b) Întârzierea (din Exemplul 101)

$$x(t) = \bigcup_{\xi \in [t-d, t-d+m]} u(\xi)$$

satisface $x \in f_{AI}^{m,0}$; pentru orice δ_r, δ_f cu cel puţin una dintre $\delta_r > m$, $\delta_f > 0$ adevărată, există o intrare $u \in S$ aşa încât $x \notin f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$, ceea ce înseamnă că $m, 0$ sunt cele mai mari valori ale lui δ_r, δ_f care fac adevărată $\forall u \in S, x \in f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$.

DEMONSTRAŢIE. a) În a doua proprietate (1.4) ipoteza afirmă

$$t' > t \text{ si } x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 1 \text{ si } \overline{x(t'-0)} \cdot x(t') = 1,$$

de unde deducem (vezi Teorema 22)

$$u(t-d-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m)} u(\xi) \cdot \overline{u(t-d+m)} = 1,$$

$$\overline{u(t'-d-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t'-d, t'-d+m]} u(\xi) = 1,$$

i.e. $t - d + m = t' - d - \varepsilon$ pentru un $\varepsilon > 0$ şi, în cele din urmă $t' - t > m$.

Presupunem că există $\delta_r > 0$ şi $\delta_f \geq 0$ aşa încât $x \in f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$. Luăm un $\varepsilon \in (0, \delta_r)$ şi $u = \chi_{[0,m+\varepsilon)}$ pentru care avem

$$x(t) = \bigcap_{\xi \in [t-d, t-d+m]} \chi_{[0,m+\varepsilon)}(\xi) = \chi_{[d,d+\varepsilon)}(t).$$

Aşadar $x \notin f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$, contradicţie. În mod similar, presupunerea că există $\delta_r \geq 0$ şi $\delta_f > m$ cu $x \in f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ ne conduce la următorul contraexemplu. Fie $u =$

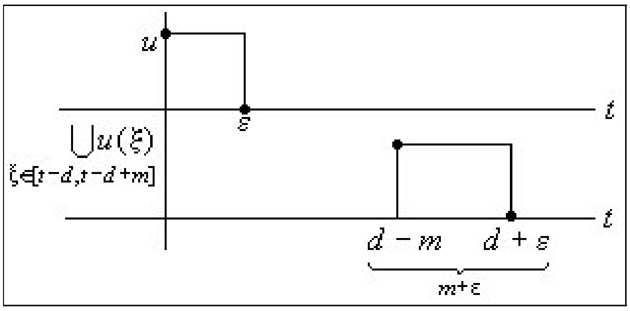

FIGURA 3. Întârziere deterministă, Teorema 304 b)

$\chi_{(-\infty,0)\cup[\varepsilon,\infty)}$, unde $\varepsilon \in (0, \delta_f - m)$. Avem

$$x(t) = \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m]} \chi_{(-\infty,0)\cup[\varepsilon,\infty)}(\xi) = \chi_{(-\infty,d-m)\cup[d+\varepsilon,\infty)}(t).$$

Deoarece $d + \varepsilon - (d - m) = \varepsilon + m < \delta_f$, deducem contradicţia $x \notin f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$. □

TEOREMĂ 305. *Întârzierea $f_{UD} \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ este invariantă în timp şi absolut inerţială, fiind inclusă în $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ pentru orice $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$; $f_{UD} \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ este autoduală dacă şi numai dacă $\delta_r = \delta_f$.*

DEMONSTRAŢIE. Intersecţia $f_{UD} \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ este o întârziere (Teorema 297), iar faptul că este inclusă în $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ e evident.

Pentru a demonstra invarianţa în timp, observăm că f_{UD} e invariant în timp (Teorema 252) şi $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ e el însuşi invariant în timp (Teorema 301). Deci intersecţia lor e invariantă în timp (Teorema 168).

Demonstrăm acum afirmaţia relativă la auto-dualitate. Pentru a arăta necesitatea, putem scrie

$$(f_{UD} \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f})^* = f_{UD}^* \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f *} = f_{UD} \cap f_{AI}^{\delta_f,\delta_r} = f_{UD} \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$$

şi să presupunem prin absurd că $\delta_r = \delta_f$ e falsă, de exemplu $\delta_r < \delta_f$. Atunci, pentru $u = 0$, $\chi_{[0,\delta_f)} \in (f_{UD} \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f})(u)$ şi $\chi_{[0,\delta_f)} \notin (f_{UD} \cap f_{AI}^{\delta_f,\delta_r})(u)$, contradicţie care arată că $\delta_r \geq \delta_f$ e necesară. În mod similar avem $\delta_r \leq \delta_f$. Aşadar egalitatea $\delta_r = \delta_f$ e necesară. În mod evident această egalitate e suficientă pentru ca $f_{UD} \cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ să fie auto-duală. □

9. Alte definiţii ale inerţiei absolute

OBSERVATIE 124. *O altă definiţie a inerţiei absolute e dată de înlocuirea inegalităţilor (1.1) cu inegalităţile*

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi\in[t,t+\delta_r)} x(\xi), \tag{9.1}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi\in[t,t+\delta_f)} \overline{x(\xi)}$$

unde $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$ *din nou, sistem autonom pe care îl notăm prin* $f_{AI'}^{\delta_r,\delta_f}$. *Când* $\delta_r = 0, \delta_f = 0$ *inegalităţile precedente iau forma trivială, ca şi* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$. *Studiul lui* $f_{AI'}^{\delta_r,\delta_f}$ *e similar cu acela al lui* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$. *Diferenţa e că în (1.4)* $t'-t > \delta_r, t'-t > \delta_f$ *sunt înlocuite prin* $t'-t \geq \delta_r, t'-t \geq \delta_f$.

Există încă posibilitatea de a combina prima inegalitate din (1.1) cu a doua inegalitate din (9.1), sau prima inegalitate din (9.1) cu a doua inegalitate din (1.1).

EXEMPLU 105. *Sistemul definit prin inegalităţile (Teorema 322 va analiza un sistem similar)*

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t)} \overline{x(\xi)} \cdot u(t), \tag{9.2}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t)} x(\xi) \cdot \overline{u(t)}, \tag{9.3}$$

$\delta_r > 0, \delta_f > 0$, *e o întârziere deterministă invariantă în timp. Soluţia sa satisface* $x \in f_{AI'}^{\delta_r,\delta_f}$; *întârzierea e auto-duală dacă şi numai dacă* $\delta_r = \delta_f$.

DEMONSTRAŢIE. Putem presupune că o soluţie a lui (9.2), (9.3) există întotdeauna. Arătăm că sistemul e o întârziere şi fie $u \in S_c(1)$. Atunci există $t_f \in \mathbf{R}$ aşa încât $u_{|[t_f,\infty)} = 1$ şi $\forall t \geq t_f$ (9.2), (9.3) iau forma

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t)} \overline{x(\xi)}, \tag{9.4}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 0. \tag{9.5}$$

Dacă $\bigcap_{\xi \in [t_f-\delta_f, t_f)} \overline{x(\xi)} = 1$, atunci $x(t_f) = 1$. În plus avem $x_{|[t_f,\infty)} = 1$.

Pentru $\bigcap_{\xi \in [t_f-\delta_f, t_f)} \overline{x(\xi)} = 0$, există două posibilităţi:

a) $x(t_f - 0) = 0$. Deoarece $\exists \xi \in [t_f - \delta_f, t_f), x(\xi) = 1$, punem $\xi_f = \sup\{\xi | \xi \in [t_f - \delta_f, t_f), x(\xi) = 1\}$ şi avem că $x_{|[\xi_f+\delta_f,\infty)} = 1$;

b) $x(t_f - 0) = 1$. Atunci $x_{|[t_f,\infty)} = 1$.

Similar, putem arăta că dacă $u \in S_c(0)$, atunci orice soluţie x a lui (9.2), (9.3) îi aparţine lui $S_c(0)$.

Determinismul întârzierii se demonstrează în felul următor. Există $t_0 \in \mathbf{R}$ aşa încât $x_{|(-\infty,t_0)} = x(-\infty+0), u_{|(-\infty,t_0)} = u(-\infty+0)$. De aici avem $x(-\infty+0) = u(-\infty+0)$. Presupunerea de existenţă a lui $t_1 \geq t_0$ şi a două soluţii distincte x, y a lui (9.2), (9.3) care satisfac $x_{|(-\infty,t_1)} = y_{|(-\infty,t_1)}, x(t_1) \neq y(t_1)$ dă o contradicţie.

Invarianţa în timp decurge din faptul că dacă x e soluţia sistemului, atunci pentru orice $d \in \mathbf{R}$ obţinem că $x \circ \tau^d$ e soluţia sistemului

$$\overline{y(t-0)} \cdot y(t) = \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t)} \overline{y(\xi)} \cdot u(t-d),$$

$$y(t-0) \cdot \overline{y(t)} = \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t)} y(\xi) \cdot \overline{u(t-d)}.$$

Inerţia absolută e o consecinţă a observaţiei că

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t)} \overline{x(\xi)} \cdot u(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t)} \overline{x(\xi)},$$

$$x(t-0)\cdot\overline{x(t)}=\bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t)}x(\xi)\cdot\overline{u(t)}\leq\bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t)}x(\xi)$$

şi aceste două inegalităţi sunt o versiune a lui (1.5).

Auto-dualitatea implică echivalenţa dintre (9.2), (9.3) şi următorul sistem

$$\overline{x(t-0)}\cdot x(t)=\bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t)}\overline{x(\xi)}\cdot u(t),$$

$$x(t-0)\cdot\overline{x(t)}=\bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t)}x(\xi)\cdot\overline{u(t)}.$$

Putem demonstra că aceasta se întâmplă dacă şi numai dacă $\delta_r=\delta_f$. □

10. Întârzieri Zeno

DEFINITIE 118. *Dacă sistemul $f:S\to P^*(S)$ satisface una dintre proprietăţile*
i) $\forall\varepsilon>0,\exists t\in\mathbf{R},\exists t'\in\mathbf{R},\exists u\in S,\exists x\in f(u)$,

$$\overline{x(t-0)}\cdot x(t)=1 \text{ si } x(t'-0)\cdot\overline{x(t')}=1 \text{ si } 0<t'-t<\varepsilon,$$

ii) $\forall\varepsilon>0,\exists t\in\mathbf{R},\exists t'\in\mathbf{R},\exists u\in S,\exists x\in f(u)$,

$$x(t-0)\cdot\overline{x(t)}=1 \text{ si } \overline{x(t'-0)}\cdot x(t')=1 \text{ si } 0<t'-t<\varepsilon,$$

atunci el se numeşte ***Zeno****.*

TEOREMĂ 306. *Dacă întârzierea f este Zeno, atunci orice întârziere $g\supset f$ este Zeno. Dacă f nu este Zeno, atunci toate subîntârzierile sale $g\subset f$ nu sunt Zeno.*

OBSERVATIE 125. *Proprietăţile i), ii) definitorii ale întârzierilor Zeno (numele e dat de Zeno din Elea 495?-435? înainte de Cristos) sunt considerate a fi nenaturale pentru o întârziere f, în sensul că existenţa intrărilor care produc impulsuri ale stărilor cu o lungime arbitrar de scurtă nu corespunde comportării dispozitivelor din electronica digitală, care sunt caracterizate printr-o oarecare încetineală. De exemplu întârzierea I_d e Zeno.*

În general, literatura prezintă într-o modalitate uşor diferită conceptele legate de numele lui Zeno, datorită în special faptului că autorii nu folosesc aceeaşi noţiune de semnal ca noi. Să-l cităm pe Karl Henrik Johansson[1] spunând 'automatele hibride Zeno acceptă execuţii[2] cu infinit de multe tranziţii discrete într-un interval finit de timp. Sistemele fizice reale nu sunt Zeno, desigur, dar automatele hibride cale modelează sistemele reale pot fi Zeno. Fenomenele Zeno sunt deseori datorate unui prea mare nivel de abstractizare'. Alţi autori tratează problema semnalelor Zeno. Reproducem în acest context părerea asupra condiţiilor Zeno exprimată de Edward A. Lee[3]: modelul 'ilustrează o condiţie Zeno, unde înainte de t_0 se întâmplă un număr infinit de evenimente şi deci ceasul nici măcar nu poate produce ieşirea de la momentul de timp t_0'. 'În cele din urmă execuţia încetează avansul timpului'.

În modelare, preferăm să folosim întârzierile care nu sunt Zeno.

TEOREMĂ 307. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru întârzierea f:*
a) f nu este Zeno;
b) există $\delta_r>0$ şi $\delta_f>0$ aşa încât $f\subset f_{AI'}^{\delta_r,\delta_f}$.

---

[1] Hybrid systems, EECS291E, UC Berkeley, Spring 2000, Lecture #4, Zeno Hybrid Automata
[2] i.e. au stări $x\in f(u)$.
[3] Advanced Topics in Systems Theory, EECS290N, UC Berkeley, Fall 2004.

Demonstraţie. Negaţia proprietăţii din Definiţia 118 poate fi scrisă sub forma: următoarele afirmaţii sunt adevărate

i) $\exists \delta_r > 0, \forall t \in \mathbf{R}, \forall t' \in \mathbf{R}, \forall u \in S, \forall x \in f(u)$,

$$(t < t' \ si \ \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 1 \ si \ x(t'-0) \cdot \overline{x(t')} = 1) \Longrightarrow t' - t \geq \delta_r;$$

ii) $\exists \delta_f > 0, \forall t \in \mathbf{R}, \forall t' \in \mathbf{R}, \forall u \in S, \forall x \in f(u)$,

$$(t < t' \ si \ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 1 \ si \ \overline{x(t'-0)} \cdot x(t') = 1) \Longrightarrow t' - t \geq \delta_f$$

şi aceasta e echivalentă cu $f \subset f_{AI'}^{\delta_r, \delta_f}$ (vezi de asemenea (1.4)). □

CAPITOLUL 13

Întârzieri relativ inerţiale

Inerţia relativă este proprietatea stărilor de a avea viteza de variaţie limitată de o funcţie care depinde de intrare, iar întârzierile relativ inerţiale sunt acele întârzieri ale căror stări sunt relativ inerţiale. Chiar dacă conceptul are legături strânse cu literatura publicată, el are un neajuns major, pe care noi l-am numit paradoxul inerţiei: legarea în serie a două întârzieri relativ inerţiale nu este în general o întârziere relativ inerţială. Se dă un contraexemplu în acest sens.

Se prezintă câteva proprietăţi importante ale acestor întârzieri, exemple, precum şi legătura cu inerţia absolută şi cu fenomenele de tip Zeno.

1. Inerţia relativă

TEOREMĂ 308. *Fie numerele* $0 \leq \mu_r \leq \delta_r$, $0 \leq \mu_f \leq \delta_f$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

$$\begin{aligned} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) &\leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi), \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} &\leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)}; \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) &\leq \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi), \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} &\leq x(t-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

unde $u, x \in S$.

DEMONSTRAŢIE. Similară cu partea (1.1) $\Longleftrightarrow$ (1.2) din demonstraţia Teoremei 287. $\square$

DEFINITIE 119. *Sistemul* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f} : S \to P^*(S)$ *definit de oricare din proprietăţile (1.1), (1.2) se numeşte* ***proprietatea de inerţie relativă****, iar numerele* $\mu_r, \delta_r, \mu_f, \delta_f$ *poartă numele de* ***parametrii inerţiali (crescători, descrescători)****.*

OBSERVATIE 126. *Atributul 'relativ' dat inerţiei se referă la faptul că proprietatea* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *depinde de u, ca opusă cazului anterior de inerţie 'absolută'* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$, *când sistemul a fost autonom.*

$f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *e un sistem inttr-adevăr. De exemplu* $\forall u \in S$, *funcţiile constante* $0, 1 \in S$ *aparţin lui* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u)$.

Compatibilitatea dintre proprietatea de inerţie relativă şi valorile iniţiale $u(-\infty+0)$, $x(-\infty+0)$ *e dată de faptul că există* t_0 *aşa încât pentru orice* $t < t_0$, *avem*

$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 0$. *Aşadar proprietatea de inerţie relativă este îndeplinită în mod trivial pe o mulţime* $t \in (-\infty, t_0)$.

Pe de altă parte, pentru orice $\lambda \in \mathbf{B}$, *avem că* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(\lambda) = \{0,1\} \cup \{\overline{\lambda} \oplus \chi_{[d,\infty)} | d \in \mathbf{R}\}$ *şi am identificat din nou constantele Boolene cu semnalele constante. Aceasta arată că atunci când intrarea e constantă stările relativ inerţiale sunt monotone.*

Remarcăm ce devine proprietatea de inerţie relativă în cazul 'trivial' când $\delta_r = \delta_f = \mu_r = \mu_f = 0$

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq u(t), \tag{1.3}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \overline{u(t)}. \tag{1.4}$$

Acest lucru nu e defel trivial. Inegalităţile (1.3), (1.4) descriu situaţia când x poate comuta doar dacă devine egal cu u. O situaţie mai generală decât (1.3), (1.4), când $\delta_r \geq 0$, $\delta_f \geq 0$, $\mu_r = \mu_f = 0$, *a fost numită de noi în câteva lucrări anterioare* ***proprietatea de constanţă*** *şi întârzierile care o satisfac au fost numite* ***constante.***

Există o variantă a lui $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$, *similară variantelor* $f_{BD'}^{d_r,d_f}$ *şi* $f_{AI'}^{\delta_r,\delta_f}$ *pentru* $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ *şi* $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$, *i.e. putem înlocui (1.1) prin*

$$\begin{aligned}
\overline{x(t-0)} \cdot x(t) &\leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t)} u(\xi), \\
x(t-0) \cdot \overline{x(t)} &\leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t)} \overline{u(\xi)},
\end{aligned}$$

unde $\delta_r > 0, \delta_f > 0$. *Această proprietate se notează prin* $f_{RI'}^{\delta_r,\delta_f}$ *şi se analizează similar cu* $f_{RI}^{\delta_r,\delta_f}$.

2. Ce spun alţi autori

OBSERVATIE 127. *Interpretăm din nou proprietatea de inerţie relativă prin reproducerea unor definiţii informale.*

[**15**], [**16**] *(vezi Definiţia 103, a)) afirmă: întârzierile inerţiale 'modelează faptul că circuitele nu răspund' pe ieşiri 'la două tranziţii' de la intrare 'care sunt foarte apropiate'. În cazul în care două tranziţii ale lui u sunt 'foarte apropiate', i.e. dacă u are un* 1*-impuls de lungime* $\leq \mu_r$, *atunci funcţia* $\bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi)$ *este nulă pe o mulţime în care funcţia* $\overline{x(t-0)} \cdot x(t)$ *e de asemenea nulă: există* $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ *aşa încât* $t_3 - t_2 \leq \mu_r$ *şi*

$$u(t) = u(t) \cdot \chi_{(-\infty,t_1)}(t) \oplus \chi_{[t_2,t_3)}(t) \oplus u(t) \cdot \chi_{[t_4,\infty)}(t),$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi) \cdot \chi_{(-\infty, t_1+\delta_r-\mu_r) \cup [t_4+\delta_r, \infty)}(t)$$

implică

$$\forall \xi \in [t_1 + \delta_r - \mu_r, t_4 + \delta_r), \overline{x(\xi - 0)} \cdot x(\xi) = 0.$$

Situaţia e similară dacă u are un 0*-impuls de lungime* $\leq \mu_f$.

În acest context rescriem un citat din [**14**] *(vezi Definiţia 103 b)): 'impulsuri mai scurte sau egale cu mărimea întârzierii nu sunt transmise' în maniera următoare: 'impulsuri mai scurte sau egale cu* μ_r *(respectiv cu* μ_f*) nu sunt transmise şi impulsuri strict mai lungi decât* μ_r *(respectiv decât* μ_f*) pot fi transmise'.*

Pe de altă parte, Definiţia 104, ii) şi Definiţia 105, i) arată, păstrând notaţiile ultimei, ca $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *cu* $\delta_r = \delta_f = d_{\min}$, $\mu_r = \mu_f = d_{\min} - 0$, *i.e. ca* $f_{RI'}^{\delta_r,\delta_f}$. *Acest punct de vedere e asemănător aceluia din* [**15**], [**16**] *vezi Convenţia din Observaţia 96 care afirmă că: 'întârzierea de transmisie a tranziţiilor e aceeaşi cu pragul de anulare'. Aici* δ_r, δ_f *acţionează ca 'întârzieri de transmisie a tranziţiilor', chiar dacă ele sunt mai degrabă 'întârzieri minime de transmisie a tranziţiilor', iar* μ_r, μ_f *acţionează ca 'praguri de anulare'. 'E aceeaşi cu' înseamnă că cele două cantitaţi diferă printr-o infinitezimală.*

Mai departe, să ne reamintim [**1**] *(vezi Observaţia 101) afirmaţia: 'schimbările trebuie să persiste pentru cel puţin* l_1 *unităţi de timp dar să se propage după un timp* $l_2, l_2 > l_1$*'. În formalismul nostru reprezentat prin* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *dacă acceptăm auto-dualitatea, avem:* $l_1 = \mu_r = \mu_f, l_2 = \delta_r = \delta_f$ *şi 'schimbările trebuie să persiste pentru strict mai mult decât* l_1 *unităţi de timp dar să se propage după mai mult sau egal cu* $l_2, l_2 \geq l_1$ *unităţi de timp'.*

3. Relaţia dintre inerţia relativă şi inerţia absolută

TEOREMĂ 309. *Fie* $0 \leq \mu_r \leq \delta_r$, $0 \leq \mu_f \leq \delta_f$ *arbitrare. Dacă* $\delta_f \geq \delta_r - \mu_r$, $\delta_r \geq \delta_f - \mu_f$, *atunci* $\forall u \in S, f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u) \subset f_{AI}^{\delta_f-\delta_r+\mu_r,\delta_r-\delta_f+\mu_f}(u)$.

DEMONSTRAŢIE. Luăm $t, t' \in \mathbf{R}$, $u \in S$ şi $x \in f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u)$ în mod arbitrar, astfel încât

$$t < t' \text{ si } \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = 1 \text{ si } x(t'-0) \cdot \overline{x(t')} = 1.$$

Obţinem

$$\bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t'-\delta_f, t'-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)} = 1$$

$$\Longrightarrow [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r] \cap [t'-\delta_f, t'-\delta_f+\mu_f] = \emptyset$$

$$\Longrightarrow t-\delta_r+\mu_r < t'-\delta_f \text{ sau } t'-\delta_f+\mu_f < t-\delta_r$$

$$\Longrightarrow t'-t > \delta_f-\delta_r+\mu_r \text{ sau } t'-t < \delta_f-\mu_f-\delta_r$$

$$\Longrightarrow t'-t > \delta_f-\delta_r+\mu_r$$

(inegalitatea $t'-t < \delta_f-\mu_f-\delta_r$ e falsă, deoarece membrul stâng e strict pozitiv şi membrul drept e nepozitiv).

Demonstraţia e similară pentru a doua inegalitate. □

OBSERVATIE 128. *Inegalităţile* $\delta_f \geq \delta_r - \mu_r, \delta_r \geq \delta_f - \mu_f$ *din ipoteza Teoremei 309 sunt similare cu* CC_{BD}.

4. Întârzieri relativ inerţiale

DEFINITIE 120. *Fie numerele* $0 \leq \mu_r \leq \delta_r$, $0 \leq \mu_f \leq \delta_f$ *şi întârzierea* f. *Dacă* f *satisface condiţia*

$$\forall u \in S, f(u) \subset f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u),$$

atunci e numită ***întârziere relativ inerţială****. Obişnuim să spunem că* f ***satisface proprietatea de inerţie relativă*** $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$.

TEOREMĂ 310. *Fie întârzierea* f *şi numerele* $0 \leq \mu_r \leq \delta_r, 0 \leq \mu_f \leq \delta_f$ *astfel încât* $\forall u \in S, f(u) \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u) \neq \emptyset$. *Atunci* f *defineşte întârzierea relativ inerţială* $f \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$.

DEMONSTRAŢIE. $\forall u \in S, f(u) \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u) \neq \emptyset$ şi $f \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f} \subset f$ arată că $f \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ e o întârziere şi din $f \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f} \subset f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ deducem că întârzierea e relativ inerţială. □

DEFINITIE 121. *Întârzierea* $f \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *definită în condiţiile teoremei precedente se numeşte* ***întârzierea relativ inerţială indusă de*** f.

OBSERVATIE 129. *Întârzierile relativ inerţiale sunt cele mai larg acceptate modele inerţiale şi, în acelaşi timp, cele mai controversate. Controversele sunt generate de faptul că, în teoriile neformalizate unde sunt folosite, nu se poate demonstra că legarea în serie a două întârzieri relativ inerţiale e o întârziere relativ inerţială, adică o proprietate normală de închidere. Ne vom referi la acest aspect important mai târziu.*

Fie parametrii $0 \leq \mu_r \leq \delta_r$ *şi* $0 \leq \mu_f \leq \delta_f$. *Faptul că întârzierea* f *e relativ inerţială* $f \subset f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *şi că* $\delta_f \geq \delta_r - \mu_r, \delta_r \geq \delta_f - \mu_f$, *implică din Teorema 309 că* f *e absolut inerţial* $f \subset f_{AI}^{\delta_f-\delta_r+\mu_r,\delta_r-\delta_f+\mu_f}$. *Mai departe, dacă* f' *este o întârziere arbitrară cu* $\forall u \in S, f'(u) \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u) \neq \emptyset$, *atunci întârzierea indusă* $f' \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *este o subîntârziere a întârzierii induse* $f' \cap f_{AI}^{\delta_f-\delta_r+\mu_r,\delta_r-\delta_f+\mu_f}$.

EXEMPLU 106. *Situaţiile extreme ale întârzierilor relativ inerţiale* $f \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *induse de întârzierea* f *sunt create de* $f = f_{UD}$ *şi respectiv de* $f = I_d$, *care definesc întârzieri relativ inerţiale pentru toţi* $\mu_r, \delta_r, \mu_f, \delta_f$ *aşa încât* $0 \leq \mu_r \leq \delta_r$, $0 \leq \mu_f \leq \delta_f$ *şi respectiv aşa încât* $\mu_r = \mu_f = 0$, $\delta_r = \delta_f = d$.

EXEMPLU 107. *Cele două întârzieri din Exemplul 98 satisfac proprietatea de inerţie relativă* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *pentru toţi* $0 \leq \mu_r \leq \delta_r$, $0 \leq \mu_f \leq \delta_f$.

EXEMPLU 108. *Fie* $0 \leq m \leq d$. *Întârzierea* $x(t) = \bigcap\limits_{\xi \in [t-d,t-d+m]} u(\xi)$ *satisface proprietatea de inerţie relativă sub forma*

$$\begin{aligned} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) &\leq \bigcap_{\xi \in [t-d,t-d+m]} u(\xi), \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} &\leq \overline{u(t-d+m)}. \end{aligned}$$

În mod dual, întârzierea $x(t) = \bigcup_{\xi\in[t-d,t-d+m]} u(\xi)$ *e relativ inerţială de asemenea:*

$$\begin{aligned}\overline{x(t-0)}\cdot x(t) &\le u(t-d+m),\\ x(t-0)\cdot\overline{x(t)} &\le \bigcap_{\xi\in[t-d,t-d+m]}\overline{u(\xi)}.\end{aligned}$$

Aceste lucruri sunt o consecinţă a Teoremei 22.

5. Ordinea

TEOREMĂ 311. *Date numerele* $0\le\mu_r\le\delta_r$, $0\le\mu_f\le\delta_f$, $0\le\mu'_r\le\delta'_r$, $0\le\mu'_f\le\delta'_f$, *următoarele afirmaţii sunt adevărate:*
a) $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}\subset f_{RI}^{\mu'_r,\delta'_r,\mu'_f,\delta'_f}$;
b) $\delta_r\ge\delta'_r$, $\delta_f\ge\delta'_f$, $\delta_r-\mu_r\le\delta'_r-\mu'_r$, $\delta_f-\mu_f\le\delta'_f-\mu'_f$.

DEMONSTRAŢIE. *a)* $\Longrightarrow$ *b)* Incluziunea de la a) înseamnă că pentru orice $u\in S$ avem:

$$\begin{aligned}\bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi) &\le \bigcap_{\xi\in[t-\delta'_r,t-\delta'_r+\mu'_r]} u(\xi);\\ \bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]}\overline{u(\xi)} &\le \bigcap_{\xi\in[t-\delta'_f,t-\delta'_f+\mu'_f]}\overline{u(\xi)},\end{aligned}$$

i.e. $[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]\supset[t-\delta'_r,t-\delta'_r+\mu'_r]$, $[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]\supset[t-\delta'_f,t-\delta'_f+\mu'_f]$ şi în cele din urmă b). În acest moment, implicaţia *b)* $\Longrightarrow$ *a)* e evidentă. $\square$

OBSERVATIE 130. *Presupunem că sunt adevărate incluziunile* $f\subset f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$, $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}\subset f_{RI}^{\mu'_r,\delta'_r,\mu'_f,\delta'_f}$. *Din Teorema 311 avem că dacă* $\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f$ *sunt parametrii inerţiali ai lui* f*, atunci* $\mu'_r,\delta'_r,\mu'_f,\delta'_f$ *sunt şi ei parametrii inerţiali ai lui* f *ori de câte ori au loc* $\delta_r\ge\delta'_r$, $\delta_f\ge\delta'_f$, $\delta_r-\mu_r\le\delta'_r-\mu'_r$, $\delta_f-\mu_f\le\delta'_f-\mu'_f$.

Să considerăm acum întârzierea relativ inerţială f*. Formulăm problema găsirii acelui sistem* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *care satisface*
i) $f\subset f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$
ii) pentru orice $f_{RI}^{\mu'_r,\delta'_r,\mu'_f,\delta'_f}$ *cu* $f\subset f_{RI}^{\mu'_r,\delta'_r,\mu'_f,\delta'_f}$, *avem* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}\subset f_{RI}^{\mu'_r,\delta'_r,\mu'_f,\delta'_f}$
i.e. $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *este cea mai mică proprietate de inerţie relativă în sensul incluziunii care e satisfăcută de către* f.

6. Dualitatea

TEOREMĂ 312. *Duala lui* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *este* $f_{RI}^{\mu_f,\delta_f,\mu_r,\delta_r}$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $u\in S$ avem:

$$\begin{aligned}&(f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f})^*(u)=\\ &=\{\overline{x}|\overline{x(t-0)}\cdot x(t)\le\bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]}\overline{u(\xi)},\ x(t-0)\cdot\overline{x(t)}\le\bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]}u(\xi)\}=\\ &=\{x|x(t-0)\cdot\overline{x(t)}\le\bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]}\overline{u(\xi)},\ \overline{x(t-0)}\cdot x(t)\le\bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]}u(\xi)\}=\\ &=f_{RI}^{\mu_f,\delta_f,\mu_r,\delta_r}(u).\end{aligned}$$

□

TEOREMĂ 313. *Dacă* $f \subset f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *este o întârziere relativ inerţială, atunci* f^* *este o întârziere relativ inerţială cu* $f^* \subset f_{RI}^{\mu_f,\delta_f,\mu_r,\delta_r}$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $u \in S$ putem scrie

$$f^*(u) = \{\overline{x}|x \in f(\overline{u})\} \subset \{\overline{x}|x \in f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(\overline{u})\} =$$
$$= \{x|\overline{x} \in f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(\overline{u})\} = (f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f})^*(u) = f_{RI}^{\mu_f,\delta_f,\mu_r,\delta_r}(u)$$

şi am utilizat Teorema 312. □

7. Legarea în serie. Paradoxul inerţiei

EXEMPLU 109. *Următoarele întârzieri deterministe (vezi Exemplul 105)*

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \bigcap_{\xi \in [t-2,t)} \overline{x(\xi)} \cdot u(t), \tag{7.1}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = \bigcap_{\xi \in [t-2,t)} x(\xi) \cdot \overline{u(t)} \tag{7.2}$$

şi

$$\overline{y(t-0)} \cdot y(t) = \bigcap_{\xi \in [t-4,t)} \overline{y(\xi)} \cdot x(t), \tag{7.3}$$

$$y(t-0) \cdot \overline{y(t)} = \bigcap_{\xi \in [t-4,t)} y(\xi) \cdot \overline{x(t)} \tag{7.4}$$

sunt relativ inerţiale:

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \le u(t),$$
$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \le \overline{u(t)}$$

şi respectiv

$$\overline{y(t-0)} \cdot y(t) \le x(t),$$
$$y(t-0) \cdot \overline{y(t)} \le \overline{x(t)}.$$

Din motive de simetrie, dacă legarea lor în serie e relativ inerţială, atunci ea satisface

$$\overline{y(t-0)} \cdot y(t) \le \bigcap_{\xi \in [t-\delta,t-\delta+\mu]} u(\xi), \tag{7.5}$$

$$y(t-0) \cdot \overline{y(t)} \le \bigcap_{\xi \in [t-\delta,t-\delta+\mu]} \overline{u(\xi)}, \tag{7.6}$$

unde $0 \le \mu \le \delta$. *Alegem* $u(t) = \chi_{[0,1)\cup[2,3)\cup[4,\infty)}(t)$, *pentru care (7.1), (7.2) dau* $x(t) = \chi_{[0,3)\cup[5,\infty)}(t)$ *şi, din (7.3), (7.4) deducem* $y(t) = \chi_{[0,4)\cup[8,\infty)}(t)$. *Avem*

$$\bigcap_{\xi \in [t-\delta,t-\delta+\mu]} u(\xi) = \chi_{[\delta,1+\delta-\mu)\cup[2+\delta,3+\delta-\mu)\cup[4+\delta,\infty)}(t),$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-\delta,t-\delta+\mu]} \overline{u(\xi)} = \chi_{(-\infty,\delta-\mu)\cup[1+\delta,2+\delta-\mu)\cup[3+\delta,4+\delta-\mu)}(t)$$

unde, în principiu, intervalele $[\delta, 1+\delta-\mu), [2+\delta, 3+\delta-\mu), [1+\delta, 2+\delta-\mu), [3+\delta, 4+\delta-\mu)$ *pot fi vide sau nevide. Ţinând cont de (7.5), (7.6) se obţine:*

$$\chi_{\{0,8\}}(t) \leq \chi_{[\delta,1+\delta-\mu)\cup[2+\delta,3+\delta-\mu)\cup[4+\delta,\infty)}(t), \tag{7.7}$$

$$\chi_{\{4\}}(t) \leq \chi_{(-\infty,\delta-\mu)\cup[1+\delta,2+\delta-\mu)\cup[3+\delta,4+\delta-\mu)}(t). \tag{7.8}$$

Relaţia (7.7) implică $\delta \leq 0$, *deci* $\delta = \mu = 0$. *Acest lucru e o contradicţie cu (7.8), care devine*

$$\chi_{\{4\}}(t) \leq \chi_{(-\infty,0)\cup[1,2)\cup[3,4)}(t).$$

Concluzia este că legarea în serie a întârzierilor relativ inerţiale, în acest caz (7.1), (7.2) şi (7.3), (7.4), nu este întotdeauna o întârziere relativ inerţială. Această nereuşită a fost numită de noi 'paradoxul inerţiei'.

8. Intersecţia

Teoremă 314. *Pentru orice numere* $0 \leq \mu_r \leq \delta_r, 0 \leq \mu_f \leq \delta_f$ *şi* $0 \leq \mu'_r \leq \delta'_r, 0 \leq \mu'_f \leq \delta'_f$, *intersecţia* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f} \cap f_{RI}^{\mu'_r,\delta'_r,\mu'_f,\delta'_f}$ *este un sistem* $S \to P^*(S)$ *definit prin inegalităţile*

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi) \cdot \bigcap_{\xi\in[t-\delta'_r,t-\delta'_r+\mu'_r]} u(\xi),$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)} \cdot \bigcap_{\xi\in[t-\delta'_f,t-\delta'_f+\mu'_f]} \overline{u(\xi)}.$$

Demonstraţie. Pentru orice $u \in S$, funcţiile constante $0, 1 \in S$ aparţin intersecţiei $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u) \cap f_{RI}^{\mu'_r,\delta'_r,\mu'_f,\delta'_f}(u)$. Afirmaţia e evidentă. □

Observatie 131. *Dacă în intersecţia* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f} \cap f_{RI}^{\mu'_r,\delta'_r,\mu'_f,\delta'_f}$ *avem* $\forall t \in \mathbf{R}, [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r] \cap [t-\delta'_r, t-\delta'_r+\mu'_r] \neq \emptyset$ *şi* $[t-\delta_f, t-\delta_f+\mu_f] \cap [t-\delta'_f, t-\delta'_f+\mu'_f] \neq \emptyset$, *atunci această intersecţie e o proprietate de inerţie relativă dar, în general, afirmaţia precedentă nu e adevărată.*

Dacă $f \subset f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *e o întârziere şi* $g : S \to P^*(S)$ *e un sistem cu proprietatea* $\forall u \in S, f(u) \cap g(u) \neq \emptyset$, *atunci observăm că* $f \cap g$ *e o întârziere relativ inerţială* $\subset f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$.

9. Reuniunea

Teoremă 315. *Date fiind numerele* $0 \leq \mu_r \leq \delta_r, 0 \leq \mu_f \leq \delta_f$, $0 \leq \mu'_r \leq \delta'_r, 0 \leq \mu'_f \leq \delta'_f$, *reuniunea* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f} \cup f_{RI}^{\mu'_r,\delta'_r,\mu'_f,\delta'_f} : S \to P^*(S)$ *e exprimată prin inegalităţile*

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi) \cup \bigcap_{\xi\in[t-\delta'_r,t-\delta'_r+\mu'_r]} u(\xi),$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)} \cup \bigcap_{\xi\in[t-\delta'_f,t-\delta'_f+\mu'_f]} \overline{u(\xi)}.$$

10. Neanticipativitatea

TEOREMĂ 316. *Pentru* $0 \leq \mu_r \leq \delta_r, 0 \leq \mu_f \leq \delta_f$ *proprietatea de inerţie relativă* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *e neanticipativă în sensul Definiţiei 65, punctele v),...,ix).*

DEMONSTRAŢIE. Următoarea proprietate de neanticipativitate din Definiţia 65, v) are loc

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall u \in S, \forall v \in S, u_{|(-\infty,t]} = v_{|(-\infty,t]} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \{x_{|(-\infty,t]} | x \in f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u)\} = \{y_{|(-\infty,t]} | y \in f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(v)\}$$

deoarece funcţiile $\bigcap\limits_{\xi\in[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi)$ şi $\bigcap\limits_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)}$ depind doar de $u_{|(-\infty,t]}$ etc. □

TEOREMĂ 317. *Fie* f *o întârziere neanticipativă în sensul Definiţiei 65, oricare dintre punctele v),...,ix) şi presupunem că* $\forall u \in S, f(u) \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u) \neq \emptyset$. *Atunci întârzierea relativ inerţială indusă* $f \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *satisface aceeaşi proprietate de neanticipativitate.*

DEMONSTRAŢIE. Putem folosi Teorema 316 şi acea versiune a Teoremei 185 care e adevărată pentru această definiţie. □

11. Invarianţa în timp

TEOREMĂ 318. *Proprietatea de inerţie relativă* $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ *este invariantă în timp.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $d \in \mathbf{R}$ şi orice $u \in S$ deducem că

$$f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u \circ \tau^d) =$$
$$= \{x | \overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]} (u \circ \tau^d)(\xi),$$
$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]} \overline{(u \circ \tau^d)(\xi)}\} =$$
$$= \{x | \overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi\in[t-d-\delta_r,t-d-\delta_r+\mu_r]} u(\xi),$$
$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi\in[t-d-\delta_f,t-d-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)}\} =$$
$$= \{x | \overline{x(t+d-0)} \cdot x(t+d) \leq \bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi),$$
$$x(t+d-0) \cdot \overline{x(t+d)} \leq \bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)}\} =$$
$$= \{x \circ \tau^d | \overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi), x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)}\} =$$
$$= \{x \circ \tau^d | x \in f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u)\}.$$

□

TEOREMĂ 319. *Fie f o întârziere invariantă în timp. Dacă $\forall u \in S, f(u) \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u) \neq \emptyset$, atunci întârzierea relativ inerţială indusă de f, $f \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ e invariantă în timp.*

DEMONSTRAŢIE. Funcţia $f \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ e o întârziere, deoarece e inclusă în f şi e nevidă. Ea e şi invariantă în timp ca intersecţie a două sisteme invariante în timp. $\square$

TEOREMĂ 320. *Fie numerele $0 \leq \mu_r \leq \delta_r$, $0 \leq \mu_f \leq \delta_f$.*

a) $f_{UD} \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ este invariant în timp.

b) $f_{UD} \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ este auto-dual dacă şi numai dacă $\mu_r = \mu_f, \delta_r = \delta_f$.

DEMONSTRAŢIE. a) Din Teorema 252, f_{UD} e invariantă în timp şi $\forall u \in S$, $f_{UD}(u) \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u) \neq \emptyset$ are loc deoarece funcţia constantă aparţine intersecţiei. $f_{UD} \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ este intersecţia a două sisteme invariante în timp.

b) *Doar dacă*

$$f_{UD} \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f} = (f_{UD} \cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f})^* = f_{UD}^* \cap (f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f})^* = f_{UD} \cap f_{RI}^{\mu_f,\delta_f,\mu_r,\delta_r}$$

şi se demonstrează că acest lucru e adevărat doar dacă $\mu_r = \mu_f, \delta_r = \delta_f$. $\square$

12. Întârzieri Zeno

TEOREMĂ 321. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ să nu fie Zeno este ca $\delta_f > \delta_r - \mu_r$, $\delta_r > \delta_f - \mu_f$.*

DEMONSTRAŢIE. *Necesitatea* Presupunem prin absurd că $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ nu este Zeno şi $\delta_f \leq \delta_r - \mu_r$. Fie $u = \chi_{(-\infty,0)}$ pentru care

$$\bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} \chi_{(-\infty,0)}(\xi) = \chi_{(-\infty,\delta_r-\mu_r)}(t),$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)} = \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t-\delta_f+\mu_f]} \chi_{[0,\infty)}(\xi) = \chi_{[\delta_f,\infty)}(t).$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ avem existenţa lui $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ şi $x = \chi_{[\delta_f - \varepsilon', \delta_f)} \in f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}(u)$ contradicţie cu ipoteza care afirmă că $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ nu este Zeno. Cealaltă presupunere că $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ nu este Zeno, dar $\delta_r \leq \delta_f - \mu_f$, dă o contradicţie similară.

Suficienţa Avem

$$f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f} \subset f_{AI}^{\delta_f-\delta_r+\mu_r,\delta_r-\delta_f+\mu_f} \subset f_{AI'}^{\delta_f-\delta_r+\mu_r,\delta_r-\delta_f+\mu_f},$$

unde prima incluziune decurge din Teorema 309, în timp ce a doua, din aceea că $[t, t+\delta_f - \delta_r + \mu_r] \supset [t, t+\delta_f - \delta_r + \mu_r), [t, t+\delta_r - \delta_f + \mu_f] \supset [t, t+\delta_r - \delta_f + \mu_f)$. Afirmaţia e o consecinţă a Teoremei 307. $\square$

COROLAR 10. *Nu există întârzieri Zeno $f \subset f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ dacă şi numai dacă $\delta_f > \delta_r - \mu_r$, $\delta_r > \delta_f - \mu_f$.*

13. Studiul unei întârzieri deterministe

TEOREMĂ 322. *Fie* $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$ *astfel încât* $d_f \geq d_r - m_r$, $d_r \geq d_f - m_f$ *sunt adevărate. Ecuaţiile*

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi), \tag{13.1}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)} \tag{13.2}$$

satisfac următoarele proprietăţi:

a) compatibilitatea cu condiţiile iniţiale: $\forall u \in S, \forall x \in S$, *dacă* x *satisface (13.1), (13.2), atunci* $x(-\infty+0) = u(-\infty+0)$ *şi există* $t_0 \in \mathbf{R}$ *aşa încât, pentru orice* $t < t_0$, *avem*

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = 0, \tag{13.3}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)} = 0; \tag{13.4}$$

b) (13.1), (13.2) definesc un sistem determinist f*;*

c) compatibilitatea sistemului cu condiţiile finale: f *e o întârziere şi* $\forall u \in S_c$, *există* $t_1 \in \mathbf{R}$ *aşa încât* $\forall t \geq t_1$ *avem îndeplinite (13.3), (13.4);*

d) $f \subset f_{RI}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$;

e) $f \subset f_{AI}^{d_f-d_r+m_r,d_r-d_f+m_f}$;

f) $f \subset f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$;

g) f *este invariant în timp;*

h) f *este auto-dual dacă şi numai dacă* $d_r = d_f$ *şi* $m_r = m_f$*;*

i) f *este neanticipativ în sensul Definiţiilor 63 şi 65, punctele v),...,ix).*

DEMONSTRAŢIE. a) Fie $u \in S, x \in S$ arbitrare pentru care există $t_0', t_0'' \in \mathbf{R}$ şi $\lambda, \mu \in \mathbf{B}$ aşa încât $x_{|(-\infty,t_0')} = \mu, u_{|(-\infty,t_0'')} = \lambda$. Aşadar, există $t_0 < \min\{t_0', t_0'' + d_r - m_r, t_0'' + d_f - m_f\}$ astfel încât (13.1), (13.2) devin pentru $t < t_0$

$$\overline{\mu} \cdot \mu = \overline{\mu} \cdot \lambda,$$

$$\mu \cdot \overline{\mu} = \mu \cdot \overline{\lambda}.$$

Obţinem $\mu = \lambda$.

b) Pentru orice $u \in S$, din a) ştim că există $t_0 \in \mathbf{R}$ astfel încât pentru $t < t_0$ soluţia e unică şi e dată de $x(t) = u(-\infty+0)$. Presupunerea că (13.1), (13.2) nu definesc un sistem înseamnă existenţa lui $t_1 \geq t_0$ astfel încât există cel puţin o soluţie x pentru $t < t_1$ şi în t_1 nu există nici o soluţie. Fie $x(t_1 - 0) = 0$, pentru care (13.1) dă

$$x(t_1) = \bigcap_{\xi \in [t_1-d_r, t_1-d_r+m_r]} u(\xi),$$

contradicţie; dacă $x(t_1 - 0) = 1$, (13.2) dă

$$x(t_1) = \overline{\bigcap_{\xi \in [t_1-d_f, t_1-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}},$$

contradicţie din nou cu presupunerea că în t_1 nu există soluţie. Deoarece t_1 a fost arbitrar, soluţia $x \in f(u)$ există şi deoarece u a fost arbitrar, f este un sistem.

Demonstraţia unicităţii e similară aceleia a existenţei, diferenţa fiind aceea că presupunerea 'în t_1 nu există soluţie' e înlocuită de 'în t_1 există două soluţii $x(t_1) = 0, x(t_1) = 1$'.

c) Fixăm un $u \in S_c$ arbitrar şi presupunem că $\exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_1, u(t) = 1$. Deoarece $\forall t \geq t_1 + d_r$, $\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = 1$ şi $\bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)} = 0$, obţinem că soluţia unică a lui (13.1), (13.2) satisface $\forall t \geq t_1 + d_r, x(t) = 1$. Situaţia e similară pentru $\exists t_1 \in \mathbf{R}, \forall t \geq t_1, u(t) = 0$, când $\forall t \geq t_1 + d_f, x(t) = 0$. Concluzionăm că $\forall t \geq t_1 + \max\{d_r, d_f\}$, sunt adevărate proprietăţile (13.3), (13.4).

d) Din (13.1), (13.2) deducem

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi),$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}.$$

e) Ţinem cont de punctul d), CC_{BD} şi aplicăm Teorema 309.

f) Presupunem prin reducere la absurd că există $t \in \mathbf{R}$ şi $u \in S$ astfel încât $\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = 1$ şi $x(t) = 0$; din (13.1) obţinem $\overline{x(t-0)} = 0$. Aşadar $x(t-0) = 1$ şi, pe de altă parte, deoarece $\bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)} = 0$ (din CC_{BD}), ecuaţia (13.2) dă $\overline{x(t)} = 0$, deci $x(t) = 1$, contradicţie. Cu alte cuvinte $\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq x(t)$. Inegalitatea $x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi)$ se demonstrează în mod similar.

g) Fie $u \in S, d \in \mathbf{R}$ arbitrare şi înlocuim x, u în (13.1), (13.2) cu $y, u \circ \tau^d$. Din prima ecuaţie avem următoarele proprietăţi echivalente:

$$\overline{y(t-0)} \cdot y(t) = \overline{y(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} (u \circ \tau^d)(\xi);$$

$$\overline{y(t-0)} \cdot y(t) = \overline{y(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi - d);$$

$$\overline{y(t-0)} \cdot y(t) = \overline{y(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi + d \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi);$$

$$\overline{y(t-0)} \cdot y(t) = \overline{y(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d-d_r, t-d-d_r+m_r]} u(\xi);$$

$$\overline{y(t+d-0)} \cdot y(t+d) = \overline{y(t+d-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi), \tag{13.5}$$

iar din a doua ecuaţie respectiv

$$y(t+d-0) \cdot \overline{y(t+d)} = y(t+d-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}. \tag{13.6}$$

În acest moment comparăm (13.1), (13.2) cu (13.5), (13.6), sisteme deterministe. Deducem faptul că $y(t+d) = x(t)$, i.e.

$$y(t) = x(t-d) = (x \circ \tau^d)(t).$$

h) $\forall u \in S, f^*(u) = \overline{f(\overline{u})} = f(u)$, unde $x = f(u)$, implică faptul că (13.1), (13.2) şi

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi),$$
$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} \overline{u(\xi)}$$

au aceeaşi soluţie. Alegem $u = \chi_{[0,\delta)}$, unde $\delta > \max\{m_r, m_f\}$ pentru care soluţiile unice ale celor două sisteme sunt $\chi_{[d_r,\delta+d_f)}$ şi $\chi_{[d_f,\delta+d_r)}$. Aşadar $d_r = d_f$. Presupunem prin absurd că $m_r \neq m_f$ şi alegem de exemplu să avem $m_r < m_f$, de unde $\delta \in (m_r, m_f)$; în această situaţie soluţiile unice ale celor două sisteme devin $\chi_{[d_r,\delta+d_f)}$ şi 0, contradicţie. Presupunerea că $m_r > m_f$ dă şi ea o contradicţie. Am demonstrat că $m_r = m_f$.

i) Arătăm neanticipativitatea în sensul Definiţiei 63. Dacă x e constant, atunci sistemul este neanticipativ. Deci presupunem că x e variabil şi aceasta implică faptul că u e şi el variabil. Fie $d \in \mathbf{R}$ astfel încât $d = \min\{t | u(t-0) \neq u(t)\}$ şi luăm, de exemplu, $u(-\infty+0) = 0$. Atunci, pentru că $u(t) \leq \chi_{[d,\infty)}(t)$, putem scrie

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} \chi_{[d,\infty)}(\xi) = \chi_{[d+d_r,\infty)}(t)$$

şi, din (13.1), deducem că

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq \chi_{[d+d_r,\infty)}(t),$$

unde a) a implicat $x(-\infty+0) = 0$. Aceste observaţii arată că

$$\min\{t | u(t-0) \neq u(t)\} = d \leq d + d_r \leq \min\{t | x(t-0) \neq x(t)\}.$$

Situaţia $u(-\infty+0) = 1$ se tratează în mod similar. Prin urmare f este neanticipativ. $\square$

Observatie 132. *Dacă în (13.1), (13.2) punem $m_r = m_f = 0$, atunci CC_{BD} implică $d_r = d_f = d$ şi sistemul*

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot u(t-d),$$
$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \overline{u(t-d)}$$

coincide cu I_d, deoarece $x(t) = u(t-d)$ este o soluţie şi soluţia e unică.

Teoremă 323. *Fie numerele reale arbitrare $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$ care satisfac $d_r - m_r \leq d_f$, $d_f - m_f \leq d_r$. Următoarele sisteme a),...,g) sunt echivalente, în sensul că pentru orice $u \in S$, dacă $x \in S$ o satisface pe una dintre ele, atunci o satisface pe oricare alta:*

a)

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi),$$
$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)};$$

b)

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi) \le x(t) \le \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi),$$

$$\overline{x(t-0)}\cdot x(t) \le \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi),$$

$$x(t-0)\cdot \overline{x(t)} \le \bigcap_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)};$$

c)

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi) \le x(t),$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)} \le \overline{x(t)},$$

$$\overline{\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)}\cdot \overline{\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}} \le \overline{x(t-0)}\cdot\overline{x(t)} \cup x(t-0)\cdot x(t);$$

d)

$$x(t)=\begin{cases} 1, dac\check{a} \bigcap\limits_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)=1 \\ 0, dac\check{a} \bigcap\limits_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}=1 \\ x(t-0), altfel \end{cases};$$

e)

$$x(t)=\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)\cup x(t-0)\cdot \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi);$$

f)

$$Dx(t)=\overline{x(t-0)}\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)\cup x(t-0)\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)};$$

g)

$$\overline{x(t-0)}\cdot x(t)\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)\cup x(t-0)\cdot\overline{x(t)}\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}\cup$$

$$\cup\overline{x(t-0)}\cdot\overline{x(t)}\cdot \overline{\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)}\cup x(t-0)\cdot x(t)\cdot \overline{\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}}=1.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $t\in\mathbf{R}$ şi $u\in S$ arbitrare şi fixate. În a),...,g), datorită satisfacerii lui CC_{BD}, există trei posibilităţi:

i) $\bigcap\limits_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)=\bigcup\limits_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi)=0;$

ii) $\bigcap\limits_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)=0, \bigcup\limits_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi)=1;$

iii) $\bigcap\limits_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} u(\xi)=\bigcup\limits_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi)=1.$

Cazul i) Ţinând cont de faptul că

$$\overline{\bigcup_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} u(\xi)}=\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}=1,$$

a) este

$$\begin{aligned}\overline{x(t-0)}\cdot x(t) &= 0,\\ x(t-0)\cdot\overline{x(t)} &= x(t-0),\end{aligned}$$

a cărei unică soluţie e $x(t)=0$. Prima cerinţă din b) dă $x(t)\leq 0$, deci $x(t)=0$. A doua inegalitate c) arată că $1\leq\overline{x(t)}$, adică $x(t)=0$. d) şi e) dau $x(t)=0$ de asemenea. f) devine $x(t-0)\oplus x(t)=x(t-0)$, cu alte cuvinte $x(t)=0$. Pentru că $\overline{\bigcap\limits_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]}u(\xi)}=1$, g) este în acest caz

$$x(t-0)\cdot\overline{x(t)}\cup\overline{x(t-0)}\cdot\overline{x(t)}=(x(t-0)\cup\overline{x(t-0)})\cdot\overline{x(t)}=\overline{x(t)}=1,$$

i.e. $x(t)=0$.

Celelalte două cazuri sunt similare, cu $x(t)=x(t-0)$ pentru Cazul ii) şi $x(t)=1$ pentru Cazul iii). □

14. Studiul unei întârzieri deterministe, variantă

LEMĂ 3. *Fie $d_r>0,d_f>0$ şi $u\in S$. Următoarele formule sunt adevărate:*

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)}u(\xi)=u(t-0)\cdot\overline{\bigcup_{\xi\in(t-d_r,t)}Du(\xi)};$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t)}\overline{u(\xi)}=\overline{u(t-0)}\cdot\overline{\bigcup_{\xi\in(t-d_f,t)}Du(\xi)}.$$

DEMONSTRAŢIE. Să demonstrăm pe prima dintre aceste două relaţii şi fie t arbitrar, fixat. Avem:

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)}u(\xi)=1\Longleftrightarrow u(t-0)=1\ si\ u_{|[t-d_r,t)}\text{ e constant}\Longleftrightarrow$$

(aplicăm continuitatea la dreapta a lui u în $t-d_r$)

$$\Longleftrightarrow u(t-0)=1\ si\ u_{|(t-d_r,t)}\text{ e constant}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow u(t-0)=1\ si\ \forall\xi\in(t-d_r,t),Du(\xi)=0\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow u(t-0)\cdot\overline{\bigcup_{\xi\in(t-d_r,t)}Du(\xi)}=1.$$

Deoarece t a fost arbitrar, ecuaţia e demonstrată. □

OBSERVATIE 133. *Ideea de a le înlocui pe $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$, $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$, $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ cu $f_{BD'}^{d_r,d_f}$, $f_{AI'}^{\delta_r,\delta_f}$, $f_{RI'}^{\delta_r,\delta_f}$ are implicaţii în modul de a înţelege Teorema 322. De exemplu, întârzierea din Teorema 323, f) ia forma*

$$Dx(t)=\overline{x(t-0)}\cdot\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)}u(\xi)\cup x(t-0)\cdot\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t)}\overline{u(\xi)},\tag{14.1}$$

unde $d_r>0,d_f>0$. În versiunea auto-duală, când $d_r=d_f=d>0$ avem:

$$\overline{x(t-0)}\cdot\bigcap_{\xi\in[t-d,t)}u(\xi)\cup x(t-0)\cdot\bigcap_{\xi\in[t-d,t)}\overline{u(\xi)}=$$

(aplicăm acum Lema 3)

$$= \overline{x(t-0)} \cdot u(t-0) \cdot \overline{\bigcup_{\xi\in(t-d,t)} Du(\xi)} \cup x(t-0) \cdot \overline{u(t-0)} \cdot \overline{\bigcup_{\xi\in(t-d,t)} Du(\xi)} =$$

$$= (\overline{x(t-0)} \cdot u(t-0) \cup x(t-0) \cdot \overline{u(t-0)}) \cdot \overline{\bigcup_{\xi\in(t-d,t)} Du(\xi)} =$$

$$= (x(t-0) \oplus u(t-0)) \cdot \overline{\bigcup_{\xi\in(t-d,t)} Du(\xi)},$$

aşa încât ecuaţia (14.1) devine

$$Dx(t) = (x(t-0) \oplus u(t-0)) \cdot \overline{\bigcup_{\xi\in(t-d,t)} Du(\xi)}. \tag{14.2}$$

După cum am afirmat deja în Exemplul 61, sistemul (14.2) e neanticipativ în sensul Definiţiilor 63, 64 şi cea de-a doua proprietate nu e în mod necesar adevărată pentru sistemul (13.1), (13.2).

Dacă $x_{|(-\infty,t_0)} = x(-\infty+0) = u(-\infty+0) = u_{|(-\infty,t_0)}$, *atunci (14.2) e echivalentă cu*

$$Dx(t) = (x(t-0) \oplus u(t-0)) \cdot \overline{\bigcup_{\xi\in(t-d,t)} Du(\xi)} \cdot \chi_{[t_0+d,\infty)}(t). \tag{14.3}$$

Partea 3

Aplicaţii

CAPITOLUL 14

Ecuaţiile circuitelor basculante bistabile ideale

1. Circuitul basculant bistabil ideal, ecuaţia generală

TEOREMĂ 324. *Următoarele două sisteme*

$$\left\{\begin{array}{c}\overline{x(t-0)}\cdot x(t)=\overline{x(t-0)}\cdot u(t)\\ x(t-0)\cdot\overline{x(t)}=x(t-0)\cdot v(t)\\ u(t)\cdot v(t)=0\end{array}\right. \tag{1.1}$$

şi

$$x(t)\cdot u(t)\cdot\overline{v(t)}\cup\overline{x(t)}\cdot\overline{u(t)}\cdot v(t)\cup \tag{1.2}$$

$$\cup(\overline{x(t-0)}\cdot\overline{x(t)}\cup x(t-0)\cdot x(t))\cdot\overline{u(t)}\cdot\overline{v(t)}=1,$$

unde $u,v,x\in S$ şi x e necunoscuta sunt echivalente, i.e. au aceleaşi soluţii.

DEMONSTRAŢIE. Fie $t\in\mathbf{R}$ arbitrar şi fixat. Avem următoarele posibilităţi.

Cazul a) $u(t)=0,v(t)=0$. Trebuie să arătăm echivalenţa dintre

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{x(t-0)}\cdot x(t)=0\\ x(t-0)\cdot\overline{x(t)}=0\end{array}\right.$$

şi

$$\overline{x(t-0)}\cdot\overline{x(t)}\cup x(t-0)\cdot x(t)=1,$$

i.e. $x(t-0)=x(t)$. Primul sistem e echivalent cu oricare dintre

$$\overline{x(t-0)}\cdot x(t)\cup x(t-0)\cdot\overline{x(t)}=0,$$

$$\overline{\overline{x(t-0)}\cdot x(t)\cup x(t-0)\cdot\overline{x(t)}}=1,$$

$$(x(t-0)\cup\overline{x(t)})\cdot(\overline{x(t-0)}\cup x(t))=1,$$

$$\overline{x(t-0)}\cdot\overline{x(t)}\cup x(t-0)\cdot x(t)=1.$$

Cazul b) $u(t)=0,v(t)=1$. Trebuie să arătăm echivalenţa dintre

$$\left\{\begin{array}{c}\overline{x(t-0)}\cdot x(t)=0\\ x(t-0)\cdot\overline{x(t)}=x(t-0)\end{array}\right.$$

şi $x(t)=0$. Deducem

$$\begin{aligned}0 &= \overline{x(t-0)}\cdot x(t)\cup(x(t-0)\cdot\overline{x(t)}\oplus x(t-0))\\ &= \overline{x(t-0)}\cdot x(t)\cup\overline{x(t-0)\cdot\overline{x(t)}}\cdot x(t-0)\cup x(t-0)\cdot\overline{x(t)}\cdot\overline{x(t-0)}\\ &= \overline{x(t-0)}\cdot x(t)\cup(\overline{x(t-0)}\cup x(t))\cdot x(t-0)\\ &= \overline{x(t-0)}\cdot x(t)\cup x(t-0)\cdot x(t)=(\overline{x(t-0)}\cup x(t-0))\cdot x(t)=x(t).\end{aligned}$$

Cazul c) $u(t) = 1, v(t) = 0$ Similar cu b), se arată că

$$\begin{cases} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 0 \end{cases}$$

e echivalent cu $x(t) = 1$.

O altă linie a demonstraţiei constă în:

- a da lui $u(t), v(t)$ toate valorile posibile şi a observa de fiecare dată că (1.1) şi (1.2) au aceleaşi soluţii $x(t-0) = x(t)$

$$\begin{cases} 0 = \overline{x(t)} \cdot u(t) \\ 0 = x(t) \cdot v(t) \\ u(t) \cdot v(t) = 0 \end{cases},$$

$$x(t) \cdot u(t) \cdot \overline{v(t)} \cup \overline{x(t)} \cdot \overline{u(t)} \cdot v(t) \cup \overline{u(t)} \cdot \overline{v(t)} = 1,$$

pentru un $t_0 \in \mathbf{R}$ şi $t < t_0$ (vezi Tabela 1);

$u(t)$	$v(t)$	$x(t)$
0	0	0, 1
0	1	0
1	0	1

Tabela 1

- a da lui $u(t), v(t), x(t-0)$ toate valorile posibile şi a observa că de fiecare dată pentru $t \geq t_0$, (1.1), (1.2) au aceleaşi soluţii $x(t)$ (vezi Tabela 2).

$u(t)$	$v(t)$	$x(t-0)$	$x(t)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1

Tabela 2

□

DEFINITIE 122. *Ecuaţiile (1.1), (1.2) se numesc* ***ecuaţiile circuitului basculant bistabil ideal****, pe scurt* ***ecuaţiile bistabilului ideal****. Sistemul* $f_{BI} : U \to P^*(S)$*,*

$$U = \{(u(t), v(t)) | u, v \in S, u(t) \cdot v(t) = 0\},$$

definit prin oricare dintre ele e numit ***bistabilul ideal*** *în timp ce ecuaţia*

$$u(t) \cdot v(t) = 0$$

e numită ***condiţia de admisibilitate a intrărilor****.*

OBSERVATIE 134. *E interesant de comparat ecuaţia bistabilului ideal* f_{BI} *(1.1) şi sistemul determinist* f *descris prin (13.1), (13.2), Capitolul 13. Condiţia de admisibilitate a intrărilor pentru* f

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)} = 0$$

este o proprietate echivalentă cu $[t-d_r, t-d_r+m_r] \cap [t-d_f, t-d_f+m_f] \neq \emptyset$ *şi cu* CC_{BD}. *Faptul că* $\forall u \in S, \exists t_0 \in \mathbf{R}, \forall t < t_0$,

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) = u(-\infty+0), \qquad \bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)} = \overline{u(-\infty+0)}$$

îl face pe f *să fie determinist, spre deosebire de* f_{BI}.

Teoremă 325. *Funcţia stare iniţială a lui* f_{BI} *este definită prin*

$$\phi_0 : U \to P^*(\mathbf{B}), \forall (u,v) \in U, \phi_0(u,v) = \begin{cases} \mathbf{B}, \textit{dacă } u(-\infty+0) = v(-\infty+0) = 0 \\ 0, \textit{dacă } u(-\infty+0) = 0, v(-\infty+0) = 1 \\ 1, \textit{dacă } u(-\infty+0) = 1, v(-\infty+0) = 0 \end{cases}$$

Demonstraţie. Pentru orice $(u,v) \in U$, există $t_0 \in \mathbf{R}$ astfel încât $u_{|(-\infty,t_0)} = u(-\infty+0), v_{|(-\infty,t_0)} = v(-\infty+0)$ şi $\forall t < t_0$ suntem într-unul din cazurile a), b), c) ale Teoremei 324. În cazul a) obţinem $x(t) \in \mathbf{B}$ constant, deoarece $x(t-0) = x(t)$; în cazul b), $x(t) = 0$ în timp ce în cazul c), $x(t) = 1$ (vezi Tabela 1). □

Teoremă 326. *Sistemul* f_{BI} *este finit şi are următoarele proprietăţi.*

a) Dacă $u = v = 0$, *atunci* $f_{BI}(u,v) = \{0,1\}$.

b) Dacă $u(-\infty+0) = v(-\infty+0) = 0$, *dar* $\exists t \in \mathbf{R}, u(t) \cup v(t) = 1$, *atunci* $f_{BI}(u,v) = \{x', x''\}$ *şi cele două stări* x', x'' *satisfac*

$$x'_{|(-\infty,t_0)} = 0,\ x''_{|(-\infty,t_0)} = 1,\ x'_{|[t_0,\infty)} = x''_{|[t_0,\infty)},$$

unde s-a notat $t_0 = \min\ supp(u \cup v)$.

c) Pentru $u(-\infty+0) \cup v(-\infty+0) = 1$, $f_{BI}(u,v)$ *are exact un element.*

Demonstraţie. a) După cum a rezultat din demonstraţia Teoremei 324, ecuaţia bistabilului ideal este în cazul a) $x(t-0) = x(t)$ şi are soluţiile constante $0, 1$.

b) Ecuaţia $x(t-0) = x(t), t < t_0$ are soluţiile x', x'' care satisfac $x'_{|(-\infty,t_0)} = 0$, $x''_{|(-\infty,t_0)} = 1$. În acest moment presupunem că $u(t_0) = 0, v(t_0) = 1$, ceea ce face ca (1.2) să devină

$$x'(t_0) = x''(t_0) = 0,$$

cu implicaţia că $\forall t > t_0, x'(t) = x''(t)$. Situaţia e similară pentru $u(t_0) = 1, v(t_0) = 0$ şi $x'(t_0) = x''(t_0) = 1$.

c) Pentru $u(-\infty+0) \cup v(-\infty+0) = 1$, Teorema 325 implică unicitatea valorii $x(-\infty+0)$ pentru toţi $x \in f_{BI}(u,v)$, de unde unicitatea lui x. □

Teoremă 327. *Sistemul* f_{BI} *este invariant în timp.*

Demonstraţie. Fie $d \in \mathbf{R}$ şi $u, v \in S$ arbitrare, fixate şi sistemul

$$\begin{cases} \overline{x(t-d-0)} \cdot x(t-d) = \overline{x(t-d-0)} \cdot u(t-d) \\ x(t-d-0) \cdot \overline{x(t-d)} = x(t-d-0) \cdot v(t-d) \\ u(t-d) \cdot v(t-d) = 0 \end{cases} . \tag{1.3}$$

Prin compararea lui (1.1) cu (1.3) putem vedea că $\forall x \in f_{BI}(u,v)$, avem $x \circ \tau^d \in f_{BI}(u \circ \tau^d, v \circ \tau^d)$. Cu alte cuvinte este adevărată incluziunea

$$\{x \circ \tau^d | x \in f_{BI}(u,v)\} \subset f_{BI}(u \circ \tau^d, v \circ \tau^d)$$

Incluziunea inversă are loc şi ea. □

TEOREMĂ 328. *Bistabilul ideal este neanticipativ în sensul Definiţiilor 63 şi 65, punctele v),...,ix).*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm neanticipativitatea în sensul Definiţiei 63.

Prima posibilitate este ca $u = v = 0$. În acest caz x e constant şi f_{BI} e neanticipativ.

Cea de-a doua posibilitate este: $\exists t_0 \in \mathbf{R}, t_0 = \min\ supp(u \cup v)$, cu implicaţia că $x_{|(-\infty,t_0)}$ e constant. Aşadar $\min\ suppDu \cup suppDv = t_0$ şi una dintre soluţii comută în t_0, cealaltă nu comută, iar proprietatea de neanticipativitate este satisfăcută din nou.

A treia posibilitate este ca $u(-\infty+0) \cup v(-\infty+0) = 1$ şi soluţia $x \in f_{BI}(u,v)$ e unică. Dacă u, v sunt constante, atunci x este constant şi f_{BI} e neanticipativ. În caz contrar, anume când există $t_0 = \min\ suppDu \cup suppDv$, avem două posibilităţi: ca x să comute sau nu în t_0, proprietatea de neanticipativitate fiind satisfăcută de fiecare dată.

Să arătăm acum neanticipativitatea în sensul Definiţiei 65, v). Fie $t_0 \in \mathbf{R}$, (u,v), $(u',v') \in U$ arbitrare şi fixate, astfel încât $u_{|(-\infty,t_0]} = u'_{|(-\infty,t_0]}, v_{|(-\infty,t_0]} = v'_{|(-\infty,t_0]}$. Datorită finitudinii lui f_{BI}, Teorema 325 arată existenţa unui $t_1 \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că $\{x_{|(-\infty,t_1]} | x \in f_{BI}(u,v)\} = \{y_{|(-\infty,t_1]} | y \in f_{BI}(u',v')\}$, i.e. t_1 este acela cu $\forall x \in f_{BI}(u,v), x_{|(-\infty,t_1]} = x(-\infty+0), \forall y \in f_{BI}(u',v'), y_{|(-\infty,t_1]} = y(-\infty+0)$. Dacă $t_1 \geq t_0$ neanticipativitatea are loc, în timp ce dacă $t_1 < t_0$, atunci ea e o consecinţă a definiţiei funcţiei $(u(t), v(t), x(t-0)) \to x(t)$ din Tabela 2 şi care se aplică de un număr finit de ori în punctele mulţimii $t \in (t_1, t_0] \cap (suppDu \cup suppDv)$. □

TEOREMĂ 329. *Sistemul f_{BI} satisface proprietatea de surjectivitate*

$$\forall x \in S, \exists (u,v) \in U, x \in f_{BI}(u,v).$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $x \in S$, este suficient să alegem $u = x$ şi $v = \overline{x}$, deoarece în acest caz (1.2) devine $x \cup \overline{x} = 1$. □

TEOREMĂ 330. *Sistemul f_{BI} este relativ stabil cu timp final mărginit:*

$$\forall (u,v) \in U \cap S_c^{(2)}, \exists t_f \in \mathbf{R}, \forall x \in f_{BI}(u,v), \exists \mu \in \mathbf{B}, x_{|[t_f,\infty)} = \mu.$$

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că pentru $(u,v) \in U$ arbitrar, există $t_f \in \mathbf{R}$ şi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{B}$ astfel încât $u_{|[t_f,\infty)} = \lambda_1, v_{|[t_f,\infty)} = \lambda_2$ i.e. pentru $t \geq t_f$, (1.1) devine

$$\begin{cases} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot \lambda_1 \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \lambda_2 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Pentru orice $x \in f_{BI}(u,v)$, avem: dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, atunci $x_{|[t_f,\infty)} = x(t_f - 0)$; dacă $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$, atunci $x_{|[t_f,\infty)} = 0$, iar când $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, atunci $x_{|[t_f,\infty)} = 1$. □

2. Elementul C

Oricare dintre următoarele afirmaţii echivalente

$$\begin{cases} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot u(t) \cdot v(t) \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \overline{u(t)} \cdot \overline{v(t)} \end{cases} \tag{2.1}$$

şi

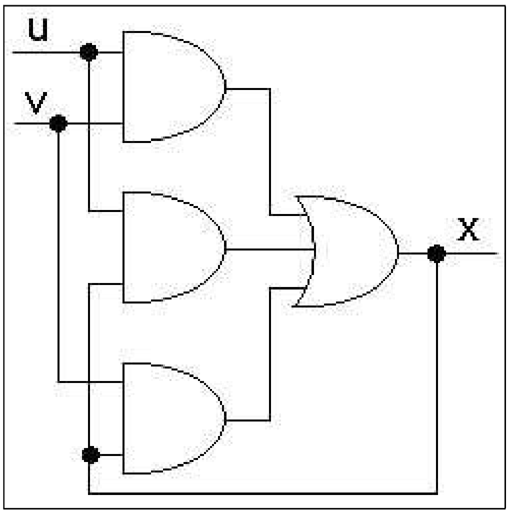

FIGURA 1. Elementul C

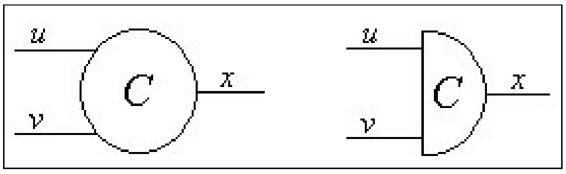

FIGURA 2. Simbolurile elementului C

$$x(t)\cdot u(t)\cdot v(t)\cup\overline{x(t)}\cdot\overline{u(t)}\cdot\overline{v(t)}\cup \tag{2.2}$$
$$\cup(\overline{x(t-0)}\cdot\overline{x(t)}\cup x(t-0)\cdot x(t))\cdot(\overline{u(t)}\cdot v(t)\cup u(t)\cdot\overline{v(t)})=1$$

sunt numite **ecuaţiile elementului C** (**al lui Muller**), unde u,v,x sunt semnale, primele două numite **intrări** şi ultima – **stare**. Ecuaţiile (2.1), (2.2) sunt acelea ale unui bistabil (1.1), (1.2), în care $u(t)$ e înlocuit prin $u(t)\cdot v(t)$, iar $v(t)$ e înlocuit prin $\overline{u(t)}\cdot\overline{v(t)}$. Se observă îndeplinirea condiţiei de admisibilitate a intrărilor. Studiul lui (2.2) dă: $x(t)$ este 1 dacă $u(t)=v(t)=1$, $x(t)$ este 0 dacă $u(t)=v(t)=0$ şi $x(t)=x(t-0)$, $x(t)$ păstrează valoarea anterioară, în rest. Forma generală a ecuaţiilor (2.1), (2.2) pentru m intrări $u_1,...,u_m$ este

$$\begin{cases}\overline{x(t-0)}\cdot x(t)=\overline{x(t-0)}\cdot u_1(t)\cdot...\cdot u_m(t)\\ x(t-0)\cdot\overline{x(t)}=x(t-0)\cdot\overline{u_1(t)}\cdot...\cdot\overline{u_m(t)}\end{cases},$$

$$x(t)\cdot u_1(t)\cdot...\cdot u_m(t)\cup\overline{x(t)}\cdot\overline{u_1(t)}\cdot...\cdot\overline{u_m(t)}$$
$$\cup(\overline{x(t-0)}\cdot\overline{x(t)}\cup x(t-0)\cdot x(t))\cdot\overline{u_1(t)\cdot...\cdot u_m(t)}\cdot(u_1(t)\cup...\cup u_m(t))=1.$$

3. Elemente C asimetrice

În [**24**], circuitul din Figura 1 e numit **elementul C simetric** şi se prezintă **elementele C asimetrice** din Figurile 3, 5, împreună cu simbolurile lor din Figurile 4 şi 6. În primul caz ecuaţiile echivalente sunt

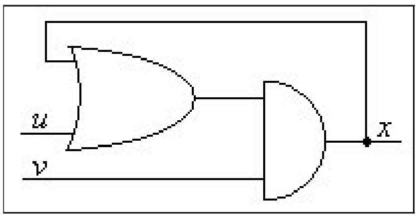

FIGURA 3. Element C asimetric

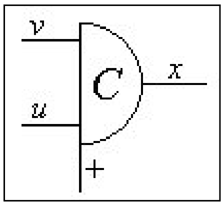

FIGURA 4. Simbolul circuitului din Figura 3

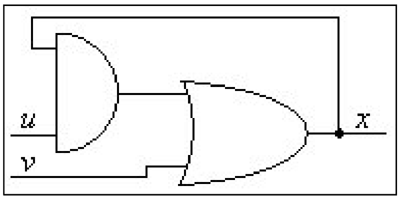

FIGURA 5. Element C asimetric

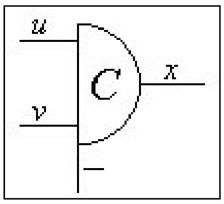

FIGURA 6. Simbolul circuitului din Figura 5

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot u(t) \cdot v(t) \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \overline{v(t)} \end{array}\right. , \tag{3.1}$$

$$x(t) \cdot u(t) \cdot v(t) \cup \overline{x(t)} \cdot \overline{v(t)} \tag{3.2}$$

$$\cup(\overline{x(t-0)} \cdot \overline{x(t)} \cup x(t-0) \cdot x(t)) \cdot \overline{u(t)} \cdot v(t) = 1$$

iar în al doilea caz ele sunt date de

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot v(t) \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \overline{u(t)} \cdot \overline{v(t)} \end{array}\right. , \tag{3.4}$$

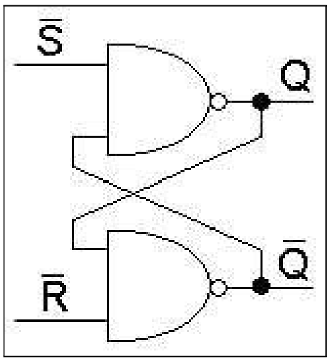

FIGURA 7. Bistabilul asincron RS

$$\begin{aligned} &x(t) \cdot v(t) \cup \overline{x(t)} \cdot \overline{u(t)} \cdot \overline{v(t)} \\ &\cup(\overline{x(t-0)} \cdot \overline{x(t)} \cup x(t-0) \cdot x(t)) \cdot u(t) \cdot \overline{v(t)} = 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Elementul C-OR

În [**26**] se indică următorul bistabil, numit **COR22**:

$$\begin{cases} \overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot (u(t) \cdot v(t) \cup y(t) \cdot z(t)) \\ x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \overline{u(t)} \cdot \overline{v(t)} \cdot \overline{y(t)} \cdot \overline{z(t)} \end{cases}, \tag{4.1}$$

sau, echivalent,

$$\begin{aligned} &x(t) \cdot (u(t) \cdot v(t) \cup y(t) \cdot z(t)) \cup \overline{x(t)} \cdot \overline{(u(t) \cup v(t) \cup y(t) \cup z(t))} \\ &\cup(\overline{x(t-0)} \cdot \overline{x(t)} \cup x(t-0) \cdot x(t)) \cdot \overline{(u(t) \cdot v(t) \cup y(t) \cdot z(t))} \cdot (u(t) \cup v(t) \cup y(t) \cup z(t)) = 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

În aceste ecuaţii intrările sunt u, v, y, z, iar x este starea. Putem vedea că în (1.1), $u(t)$ a fost înlocuit de $u(t) \cdot v(t) \cup y(t) \cdot z(t)$, în timp ce $v(t)$ a fost înlocuit de $\overline{u(t)} \cdot \overline{v(t)} \cdot \overline{y(t)} \cdot \overline{z(t)} = \overline{u(t) \cup v(t) \cup y(t) \cup z(t)}$ şi condiţia de admisibilitate

$$(u(t) \cdot v(t) \cup y(t) \cdot z(t)) \cdot \overline{u(t)} \cdot \overline{v(t)} \cdot \overline{y(t)} \cdot \overline{z(t)} = 0$$

e îndeplinită. Lucrarea [**26**] nu prezintă simbolul acestui circuit.

5. Bistabilul asincron RS

Ecuaţiile bistabilului asincron RS sunt date de

$$\begin{cases} \overline{Q(t-0)} \cdot Q(t) = \overline{Q(t-0)} \cdot S(t) \\ Q(t-0) \cdot \overline{Q(t)} = Q(t-0) \cdot R(t) \\ R(t) \cdot S(t) = 0 \end{cases}, \tag{5.1}$$

sau, echivalent, de

$$\begin{aligned} &Q(t) \cdot \overline{R(t)} \cdot S(t) \cup \overline{Q(t)} \cdot R(t) \cdot \overline{S(t)} \\ &\cup(\overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cup Q(t-0) \cdot Q(t)) \cdot \overline{R(t)} \cdot \overline{S(t)} = 1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

În (5.1), (5.2) R, S, Q sunt semnale. Semnalele R, S sunt intrările (cu numele în engleză de **reset** şi **set**) iar Q este starea, necunoscuta în raport cu care se rezolvă ecuaţiile. Eceste ecuaţii concid cu (1.1) şi (1.2), doar notaţiile sunt diferite şi tradiţionale. Regăsim, raportat la cele două ecuaţii, lucruri care au fost deja dis-

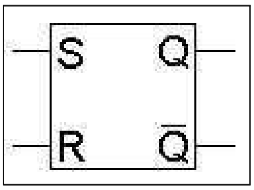

FIGURA 8. Simbolul bistabilului asincron RS

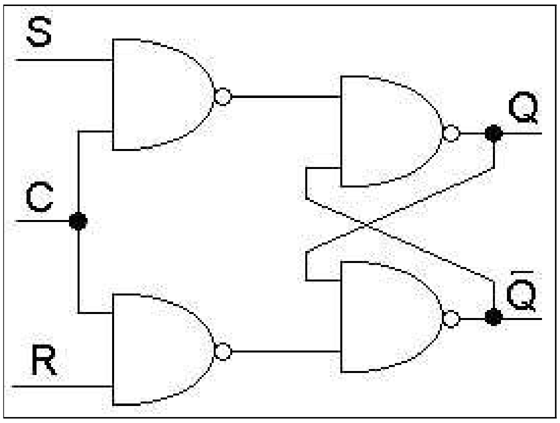

FIGURA 9. Bistabilul sincron RS

cutate în Secţiunea 1 la bistabilul asincron RS: $Q(t) = 1$ dacă $R(t) = 0, S(t) = 1$; $Q(t) = 0$ dacă $R(t) = 1, S(t) = 0$; şi $Q(t) = Q(t-0), Q$ păstrează valoarea anterioară dacă $R(t) = 0, S(t) = 0$.

6. Bistabilul sincron RS

Afirmaţiile echivalente

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{Q(t-0)} \cdot Q(t) = \overline{Q(t-0)} \cdot S(t) \cdot C(t) \\ Q(t-0) \cdot \overline{Q(t)} = Q(t-0) \cdot R(t) \cdot C(t) \\ R(t) \cdot S(t) \cdot C(t) = 0 \end{array} \right. , \tag{6.1}$$

şi

$$\begin{aligned} & C(t) \cdot (Q(t) \cdot \overline{R(t)} \cdot S(t) \cup \overline{Q(t)} \cdot R(t) \cdot \overline{S(t)} \\ & \cup (\overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cup Q(t-0) \cdot Q(t)) \cdot \overline{R(t)} \cdot \overline{S(t)}) \\ & \cup \overline{C(t)} \cdot (\overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cup Q(t-0) \cdot Q(t)) = 1 \end{aligned} \tag{6.2}$$

se numesc **ecuaţiile bistabilului sincron RS**, unde R, S, C, Q sunt semnale. Dintre acestea R, S, C sunt intrările numite **reset**, **set** şi **ceas** (sau **tact**; în engleză **clock**), iar Q e starea. Ecuaţiile (6.1), (6.2) rezultă după calcule elementare din (1.1) şi (1.2), în care $u(t) = S(t) \cdot C(t)$, $v(t) = R(t) \cdot C(t)$. Bistabilul sincron RS se comportă ca un bistabil asincron RS atunci când $C(t) = 1$, iar atunci când $C(t) = 0$, starea sa e menţinută constantă $Q(t) = Q(t-0)$.

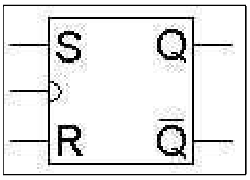

FIGURA 10. Simbolul bistabilului sincron RS

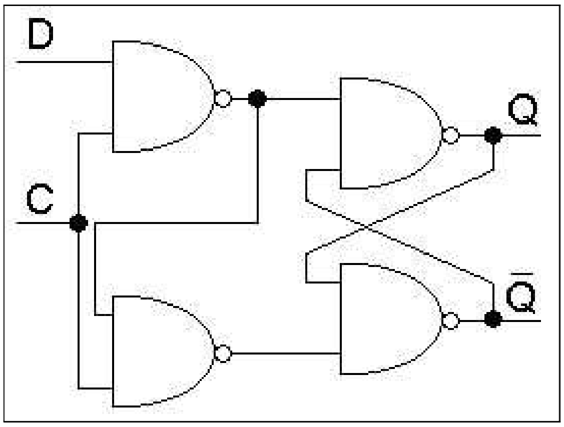

FIGURA 11. Bistabilul sincron D

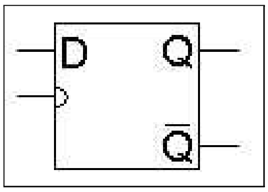

FIGURA 12. Simbolul bistabilului sincron D

7. Bistabilul sincron D

Oricare dintre următoarele afirmaţii echivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{Q(t-0)} \cdot Q(t) = \overline{Q(t-0)} \cdot D(t) \cdot C(t) \\ Q(t-0) \cdot \overline{Q(t)} = Q(t-0) \cdot \overline{D(t)} \cdot C(t) \end{array} \right. , \tag{7.1}$$

şi respectiv

$$C(t) \cdot (\overline{Q(t)} \cdot \overline{D(t)} \cup Q(t) \cdot D(t)) \cup \overline{C(t)} \cdot (\overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cup Q(t-0) \cdot Q(t)) = 1 \tag{7.2}$$

se numesc **ecuaţiile bistabilului sincron D**, unde D, C, Q sunt semnale numite la rândul lor **intrarea de date** D, **ceasul** C şi starea Q. Pe de o parte, din (7.1) se observă satisfacerea condiţiei de admisibilitate a intrărilor. Pe de altă parte, (7.1), (7.2) se obţin din ecuaţiile bistabilului sincron RS (6.1), (6.2), punând $R = \overline{S \cdot C}$ şi folosind notaţia tradiţională D pentru intrarea de date, în loc de S. Atunci când

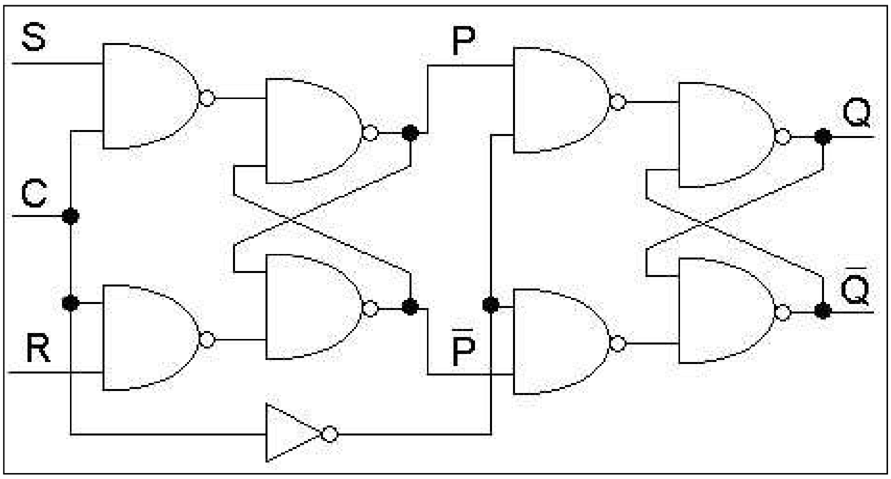

FIGURA 13. Bistabilul st ăpân-sclav RS

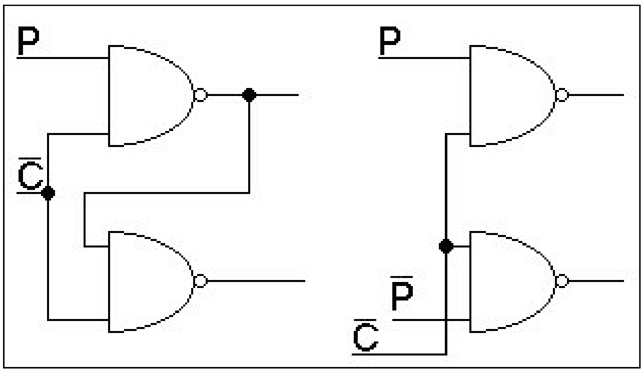

FIGURA 14. Circuite echivalente

$C(t) = 1$, bistabilul face ca $Q(t) = D(t)$, în timp ce atunci când $C(t) = 0$, Q e constant.

8. Bistabilul stăpân-sclav RS

Fiecare dintre afirmaţiile echivalente

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{P(t-0)} \cdot P(t) = \overline{P(t-0)} \cdot S(t) \cdot C(t) \\ P(t-0) \cdot \overline{P(t)} = P(t-0) \cdot R(t) \cdot C(t) \\ R(t) \cdot S(t) \cdot C(t) = 0 \\ \overline{Q(t-0)} \cdot Q(t) = \overline{Q(t-0)} \cdot P(t) \cdot \overline{C(t)} \\ Q(t-0) \cdot \overline{Q(t)} = Q(t-0) \cdot \overline{P(t)} \cdot \overline{C(t)} \end{array}\right., \tag{8.1}$$

şi respectiv

$$\begin{gathered} C(t) \cdot (\overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cup Q(t-0) \cdot Q(t)) \cdot (P(t) \cdot \overline{R(t)} \cdot S(t) \\ \cup \overline{P(t)} \cdot R(t) \cdot \overline{S(t)} \cup (\overline{P(t-0)} \cdot \overline{P(t)} \cup P(t-0) \cdot P(t)) \cdot \overline{R(t)} \cdot \overline{S(t)}) \end{gathered} \tag{8.2}$$

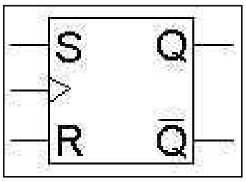

FIGURA 15. Simbolul bistabilului stăpân-sclav RS

$$\cup\overline{C(t)} \cdot (\overline{Q(t)} \cdot \overline{P(t-0)} \cdot \overline{P(t)} \cup Q(t) \cdot P(t-0) \cdot P(t)) = 1,$$

se numeşte ecuaţia **bistabilului stăpân-sclav RS** (în limba engleză stăpân-sclav se spune **master-slave**, iar bistabilele master-slave se numesc **flip-flopuri**, în particular bistabilul stăpân-sclav RS poartă numele de **edge triggered RS flip-flop**). În ecuaţiile acestui bistabil R, S, C, P, Q sunt semnale: intrările numite **reset** R, **set** S şi **ceas** C şi stările numite **starea viitoare** P şi **starea prezentă** Q. În (8.1), (8.2) semnalele R, S, C, P şi $P, \overline{C}, Q$ satisfac ecuaţiile unui bistabil sincron RS şi a unui bistabil sincron D (vezi Figura 14), în timp ce (8.2) reprezintă produsul termen cu termen a lui (6.2) cu (7.2), scrise cu aceste variabile. Cele două bistabile sunt numite **stăpân** primul şi **sclav** cel de-al doilea.

Analiza acestui circuit porneşte de la (8.2). Avem

Cazul 1 $\exists t, C(t) = 1$. Deoarece $Q(t) = Q(t-0), t$ este un punct de continuitate pentru Q.

Cazul 2 $\exists t, C(t) = 0$. Obţinem

$$Q(t) = P(t) = P(t-0). \tag{8.3}$$

Cazul 2.1 $C(t-0) = 1$. Luând limita la stânga în (8.2), rezultă

$$P(t-0)\cdot\overline{R(t-0)}\cdot S(t-0) \cup \overline{P(t-0)}\cdot R(t-0)\cdot\overline{S(t-0)} \cup \overline{R(t-0)}\cdot\overline{S(t-0)} = 1, \tag{8.4}$$

de unde

$$Q(t) = \begin{cases} P(t-0), \textit{dacă } R(t-0) = 0, S(t-0) = 0 \\ 1, \textit{dacă } R(t-0) = 0, S(t-0) = 1 \\ 0, \textit{dacă } R(t-0) = 1, S(t-0) = 0 \end{cases}. \tag{8.5}$$

Cazul 2.2 $C(t-0) = 0$. Luăm limita la stânga în (8.2), de unde

$$Q(t-0) = P(t-0).$$

Dacă ţinem cont de (8.3), t este un punct de continuitate pentru Q.

Concluzionăm că singurele momente de timp t când Q are posibilitatea să comute sunt acelea când $C(t-0) \cdot \overline{C(t)} = 1$. Acesta este aşa-numitul 'front căzător' al ceasului care face ca circuitul analizat să fie numit 'edge triggered' adică acţionat pe frontul (căzător al) lui C.

9. Bistabil stăpân-sclav D

Condiţiile echivalente:

$$\begin{cases} \overline{P(t-0)} \cdot P(t) = \overline{P(t-0)} \cdot D(t) \cdot C(t) \\ P(t-0) \cdot \overline{P(t)} = P(t-0) \cdot \overline{D(t)} \cdot C(t) \\ \overline{Q(t-0)} \cdot Q(t) = \overline{Q(t-0)} \cdot P(t) \cdot \overline{C(t)} \\ Q(t-0) \cdot \overline{Q(t)} = Q(t-0) \cdot \overline{P(t)} \cdot \overline{C(t)} \end{cases}, \tag{9.1}$$

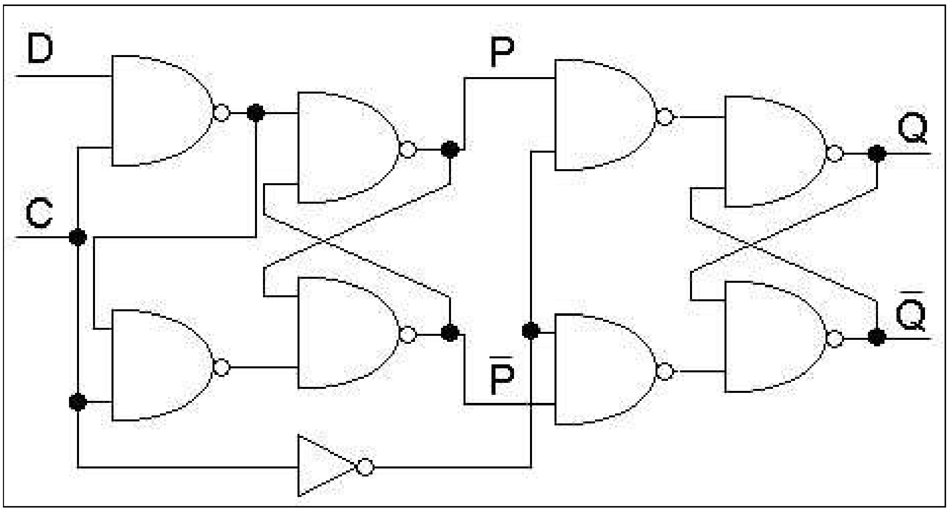

FIGURA 16. Bistabilul stăpân-sclav D

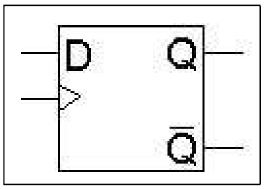

FIGURA 17. Simbolul bistabilului stăpân-sclav D

şi respectiv

$$C(t)\cdot(\overline{Q(t-0)}\cdot\overline{Q(t)}\cup Q(t-0)\cdot Q(t))\cdot(\overline{P(t)}\cdot\overline{D(t)}\cup P(t)\cdot D(t)) \tag{9.2}$$
$$\cup\overline{C(t)}\cdot(\overline{Q(t)}\cdot\overline{P(t-0)}\cdot\overline{P(t)}\cup Q(t)\cdot P(t-0)\cdot P(t))=1$$

se numesc **ecuaţiile bistabilului stăpân-sclav D**, unde D, C, P, Q sunt semnale: **intrarea de date** D, **intrarea ceas** C, **starea viitoare** P şi **starea prezentă** Q. Se vede că ecuaţiile bistabilului stăpân-sclav D reprezintă cazul particular al ecuaţiilor bistabilului stăpân-sclav RS când $R=\overline{S\cdot C}$ şi S a fost notat cu D. Bistabilul are starea prezentă Q constantă, cu excepţia momentelor de timp când $C(t-0)\cdot\overline{C(t)}=1$; atunci (8.4) devine

$$P(t-0)\cdot D(t-0)\cup\overline{P(t-0)}\cdot\overline{D(t-0)}=1,$$

i.e. $P(t-0)=D(t-0)$ şi (8.5) ia forma

$$Q(t)=\begin{cases} P(t-0), dacă\ \overline{D(t-0)}=0, D(t-0)=0 \\ 1, dacă\ \overline{D(t-0)}=0, D(t-0)=1 \\ 0, dacă\ \overline{D(t-0)}=1, D(t-0)=0 \end{cases} = \tag{9.3}$$

$$=\begin{cases} 1, dacă\ D(t-0)=1 \\ 0, dacă\ D(t-0)=0 \end{cases} = D(t-0).$$

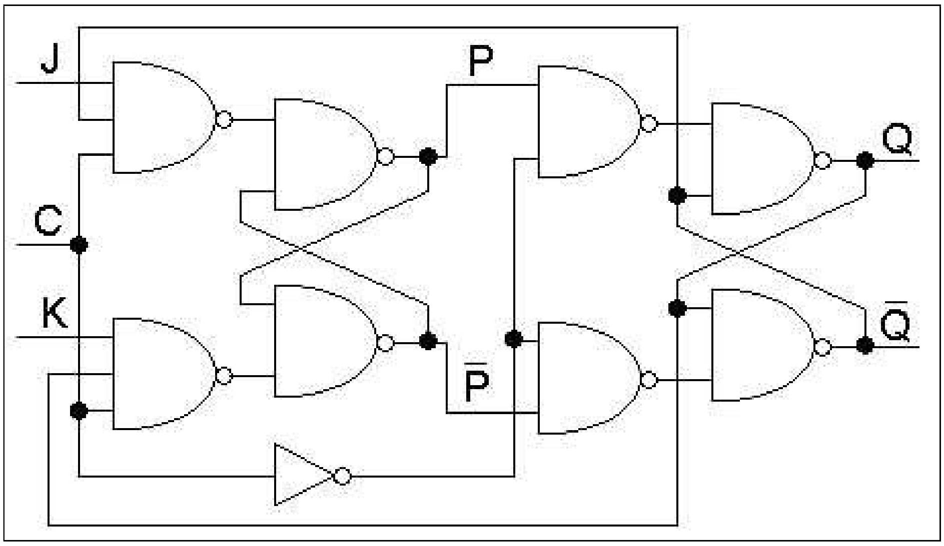

FIGURA 18. Bistabilul stăpân-sclav JK

10. Bistabilul stăpân-sclav JK

Afirmaţiile echivalente:

$$
\left\{ \begin{array}{c} \overline{P(t-0)} \cdot P(t) = \overline{P(t-0)} \cdot J(t) \cdot \overline{Q(t)} \cdot C(t) \\ P(t-0) \cdot \overline{P(t)} = P(t-0) \cdot K(t) \cdot Q(t) \cdot C(t) \\ \overline{Q(t-0)} \cdot Q(t) = \overline{Q(t-0)} \cdot P(t) \cdot \overline{C(t)} \\ Q(t-0) \cdot \overline{Q(t)} = Q(t-0) \cdot \overline{P(t)} \cdot \overline{C(t)} \end{array} \right. \tag{10.1}
$$

şi

$$
\begin{gathered} C(t) \cdot (\overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cup Q(t-0) \cdot Q(t)) \cdot (P(t) \cdot J(t) \cdot \overline{Q(t)} \cup \overline{P(t)} \cdot K(t) \cdot Q(t) \\ \cup(\overline{P(t-0)} \cdot \overline{P(t)} \cup P(t-0) \cdot P(t)) \cdot (\overline{J(t)} \cdot \overline{K(t)} \cup \overline{J(t)} \cdot \overline{Q(t)} \cup \overline{K(t)} \cdot Q(t))) \\ \cup \overline{C(t)} \cdot (\overline{Q(t)} \cdot \overline{P(t-0)} \cdot \overline{P(t)} \cup Q(t) \cdot P(t-0) \cdot P(t)) = 1 \end{gathered} \tag{10.2}
$$

se numesc **ecuaţiile bistabilului stăpân-sclav JK**, unde J, K, C, P, Q sunt semnale. Intrările acestui bistabil sunt J, K şi ceasul C, iar stările sunt P şi Q. Primele două ecuaţii ale lui (10.1) (corespunzătoare bistabilului stăpân) coincid cu primele două ecuaţii ale bistabilului stăpân-sclav RS, în care $S(t) = J(t) \cdot \overline{Q(t)}$, $R(t) = K(t) \cdot Q(t)$, iar ultimele două ecuaţii ale lui (10.1) (corespunzătoare bistabilului sclav) coincid cu ultimele două ecuaţii ale bistabilului stăpân-sclav RS. Observăm că, o dată în plus, condiţiile de admisibilitate ale intrărilor bistabilelor stăpân şi sclav sunt satisfăcute. Prin compararea lui (10.2) cu (8.2) rezultă asemănarea dintre bistabilul JK cu bistabilul stăpân-sclav RS. De exemplu Q îşi schimbă valoarea doar atunci când $C(t-0) \cdot \overline{C(t)} = 1$.

Prezentăm acum o diferenţă faţă de bistabilul stăpân-sclav RS şi fie $t_1 < t_2$ două numere pentru care $\forall t \in [t_1, t_2), C(t) = 1$. Deoarece în (10.2)

$$\forall t \in [t_1, t_2), Q(t) = Q(t-0) = Q(t_1 - 0),$$

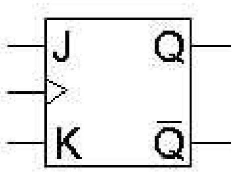

FIGURA 19. Simbolul bistabilului stăpân-sclav JK

avem două posibilităţi: $Q(t_1-0)=0$ şi $Q(t_1-0)=1$. Ecuaţiile

$$P(t)\cdot J(t)\cup(\overline{P(t-0)}\cdot\overline{P(t)}\cup P(t-0)\cdot P(t))\cdot\overline{J(t)}=1,$$

$$\overline{P(t)}\cdot K(t)\cup(\overline{P(t-0)}\cdot\overline{P(t)}\cup P(t-0)\cdot P(t))\cdot\overline{K(t)}=1$$

obţinute în cele două situaţii arată că în intervalul $[t_1,t_2)$, P comută cel mult o dată: de la 0 la 1 în primul caz (dacă $J(t)=1$) şi de la 1 la 0 în al doilea caz (dacă $K(t)=1$).

Să luăm acum în ecuaţiile bistabilului stăpân-sclav D, $D(t)=J(t)\cdot\overline{Q(t)}\cup\overline{K(t)}\cdot Q(t)$. În urma folosirii faptului că

$$(\overline{Q(t-0)}\cdot\overline{Q(t)}\cup Q(t-0)\cdot Q(t))\cdot\overline{P(t)}\cdot(\overline{J(t)}\cdot K(t)\cup\overline{J(t)}\cdot\overline{Q(t)}\cup Q(t)\cdot K(t))=$$
$$=(\overline{Q(t-0)}\cdot\overline{Q(t)}\cup Q(t-0)\cdot Q(t))\cdot\overline{P(t)}\cdot(\overline{J(t)}\cdot\overline{Q(t)}\cup Q(t)\cdot K(t)),$$

obţinem egalitatea

$$\begin{aligned}&C(t)\cdot(\overline{Q(t-0)}\cdot\overline{Q(t)}\cup Q(t-0)\cdot Q(t))\cdot(P(t)\cdot J(t)\cdot\overline{Q(t)}\cup\overline{P(t)}\cdot K(t)\cdot Q(t)\cup\\&\cup\overline{P(t)}\cdot\overline{J(t)}\cdot\overline{Q(t)}\cup P(t)\cdot\overline{K(t)}\cdot Q(t))\cup\\&\cup\overline{C(t)}\cdot(\overline{Q(t)}\cdot\overline{P(t-0)}\cdot\overline{P(t)}\cup Q(t)\cdot P(t-0)\cdot P(t))=1.\end{aligned}\tag{10.3}$$

Ecuaţiile (10.2) şi (10.3) au asemănări şi, uneori, ecuaţia bistabilului stăpân-sclav JK e considerată a fi (10.3).

11. Bistabilul stăpân-sclav T

Următoarele afirmaţii echivalente:

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{P(t-0)}\cdot P(t)=\overline{P(t-0)}\cdot\overline{Q(t)}\cdot C(t)\\ P(t-0)\cdot\overline{P(t)}=P(t-0)\cdot Q(t)\cdot C(t)\\ \overline{Q(t-0)}\cdot Q(t)=\overline{Q(t-0)}\cdot P(t)\cdot\overline{C(t)}\\ Q(t-0)\cdot\overline{Q(t)}=Q(t-0)\cdot\overline{P(t)}\cdot\overline{C(t)}\end{array}\right.,\tag{11.1}$$

respectiv

$$\begin{aligned}&C(t)\cdot(\overline{Q(t-0)}\cdot\overline{Q(t)}\cdot P(t)\cup Q(t-0)\cdot Q(t)\cdot\overline{P(t)})\\&\cup\overline{C(t)}\cdot(\overline{Q(t)}\cdot\overline{P(t-0)}\cdot\overline{P(t)}\cup Q(t)\cdot P(t-0)\cdot P(t))=1\end{aligned}\tag{11.2}$$

se numesc **ecuaţiile bistabilului stăpân-sclav T**, unde C,P,Q sunt semnale: **intrarea ceas**, **starea viitoare** şi **starea prezentă**. Condiţiile de admisibilitate ale intrărilor sunt îndeplinite pentru primele două şi pentru ultimele două ecuaţii de la (11.1) (bistabilul stăpân şi bistabilul sclav). Ecuaţiile bistabilului stăpân-sclav T reprezintă următoarele cazuri particulare: în ecuaţiile bistabilului stăpân-sclav RS, $S(t)=\overline{Q(t)},R(t)=Q(t)$; în ecuaţiile bistabilului stăpân-sclav D, $D(t)=$

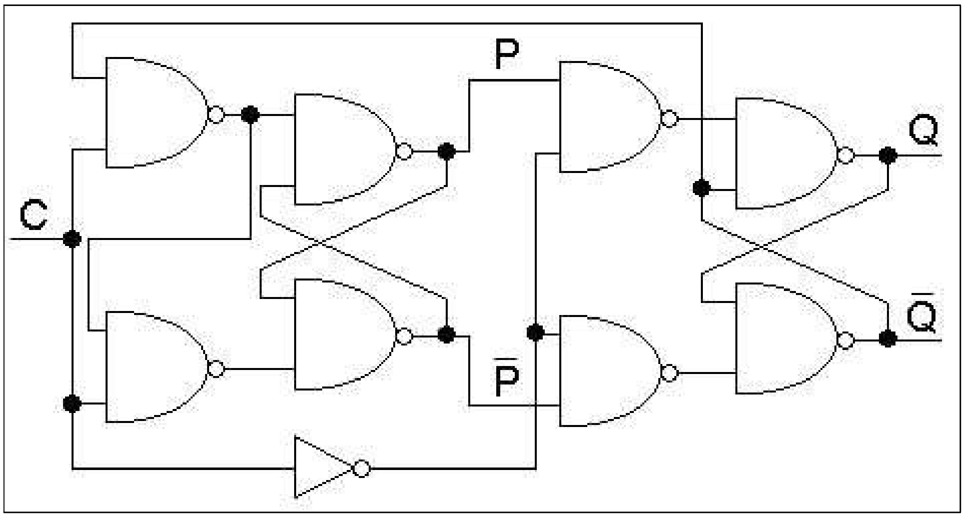

FIGURA 20. Bistabilul stăpân-sclav T

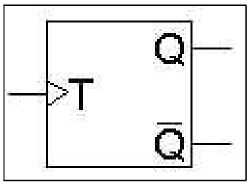

FIGURA 21. Simbolul bistabilului stăpân-sclav T

$\overline{Q(t)}$; în ecuaţiile bistabilului stăpân-sclav JK (oricare dintre (10.2), (10.3)) $J(t) = 1, K(t) = 1$.

Să considerăm acum ecuaţia (9.3) care ne arată pentru $D(t) = \overline{Q(t)}$ că $C(t-0) \cdot \overline{C(t)} = 1$ implică

$$Q(t) = D(t-0) = \overline{Q(t-0)},$$

i.e. pe fiecare front căzător al intrarii ceas, starea prezentă Q a bistabilului comută (în limba engleză 'toggles') în valoarea sa complementară, în timp ce pentru restul momentelor de timp Q rămâne constant.

CAPITOLUL 15

Câteva aplicaţii ale bistabilelor

1. Registru de deplasare cu doi biţi cu intrare serială şi ieşire paralelă

Circuitul este acela din Figura 1.

Presupunem existenţa şirului $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ cu proprietatea că

$$C(t) = \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus \chi_{[t_2,t_3)}(t) \oplus \chi_{[t_4,t_5)}(t) \oplus ...$$

În ecuaţiile

$$C(t) \cdot (\overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cup Q(t-0) \cdot Q(t)) \cdot (\overline{P(t)} \cdot \overline{D(t)} \cup P(t) \cdot D(t))$$
$$\cup \overline{C(t)} \cdot (\overline{Q(t)} \cdot \overline{P(t-0)} \cdot \overline{P(t)} \cup Q(t) \cdot P(t-0) \cdot P(t)) = 1$$
$$C(t) \cdot (\overline{Q'(t-0)} \cdot \overline{Q'(t)} \cup Q'(t-0) \cdot Q'(t)) \cdot (\overline{P'(t)} \cdot \overline{D'(t)} \cup P'(t) \cdot D'(t))$$
$$\cup \overline{C(t)} \cdot (\overline{Q'(t)} \cdot \overline{P'(t-0)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q'(t) \cdot P'(t-0) \cdot P'(t)) = 1$$

provenite din Capitolul 14, ecuaţia (9.2), ţinem cont de faptul că

$$Q(t) = D'(t)$$

şi obţinem

$$C(t) \cdot (\overline{P(t)} \cdot \overline{D(t)} \cup P(t) \cdot D(t)) \cdot (\overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q(t-0) \cdot Q(t) \cdot P'(t)) \cdot$$
$$\cdot (\overline{Q'(t-0)} \cdot \overline{Q'(t)} \cup Q'(t-0) \cdot Q'(t)) \cup$$
$$\cup \overline{C(t)} \cdot (\overline{Q(t)} \cdot \overline{P(t-0)} \cdot \overline{P(t)} \cup Q(t) \cdot P(t-0) \cdot P(t)) \cdot$$
$$\cdot (\overline{Q'(t)} \cdot \overline{P'(t-0)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q'(t) \cdot P'(t-0) \cdot P'(t)) = 1.$$

Deducem următoarele:

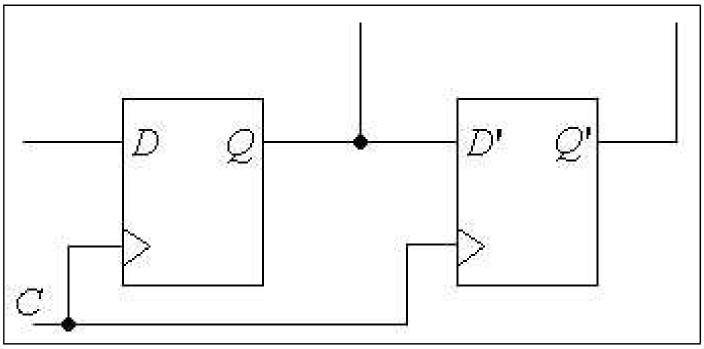

FIGURA 1. Registru de deplasare cu doi bi ţi

$t \in (-\infty, t_0)$:

$$\begin{array}{rcl} C(t) & = & 0, \\ P(t) & = & P(t-0) = Q(t) = x^0, \\ P'(t) & = & P'(t-0) = Q'(t) = y^0, \end{array}$$

unde s-au notat prin $x^0, y^0 \in \mathbf{B}$ doi parametri, reprezentând condiţiile iniţiale. Mai departe:

$t \in [t_0, t_1)$:

$$\begin{array}{rcl} C(t) & = & 1, \\ P(t) & = & D(t), \\ Q(t) & = & Q(t-0) = P'(t) = Q(t_0 - 0) = x^0, \\ Q'(t) & = & Q'(t-0) = Q'(t_0 - 0) = y^0. \end{array}$$

$t \in [t_1, t_2)$:

$$\begin{array}{rcl} C(t) & = & 0, \\ P(t) & = & P(t-0) = Q(t) = P(t_1 - 0) = D(t_1 - 0), \\ P'(t) & = & P'(t-0) = Q'(t) = P'(t_1 - 0) = x^0. \end{array}$$

$t \in [t_2, t_3)$:

$$\begin{array}{rcl} C(t) & = & 1, \\ P(t) & = & D(t), \\ Q(t) & = & Q(t-0) = P'(t) = Q(t_2 - 0) = D(t_1 - 0), \\ Q'(t) & = & Q'(t-0) = Q'(t_2 - 0) = x^0. \end{array}$$

$t \in [t_3, t_4)$:

$$\begin{array}{rcl} C(t) & = & 0, \\ P(t) & = & P(t-0) = Q(t) = P(t_3 - 0) = D(t_3 - 0), \\ P'(t) & = & P'(t-0) = Q'(t) = P'(t_3 - 0) = D(t_1 - 0). \end{array}$$

$t \in [t_4, t_5)$:

$$\begin{array}{rcl} C(t) & = & 1, \\ P(t) & = & D(t), \\ Q(t) & = & Q(t-0) = P'(t) = Q(t_4 - 0) = D(t_3 - 0), \\ Q'(t) & = & Q'(t-0) = Q'(t_4 - 0) = D(t_1 - 0). \end{array}$$

$t \in [t_5, t_6)$:

$$\begin{array}{rcl} C(t) & = & 0, \\ P(t) & = & P(t-0) = Q(t) = P(t_5 - 0) = D(t_5 - 0), \\ P'(t) & = & P'(t-0) = Q'(t) = P'(t_5 - 0) = D(t_3 - 0) \\ & & ... \end{array}$$

cu concluzia că

$$Q(t) = x^0 \cdot \chi_{(-\infty, t_1)}(t) \oplus D(t_1 - 0) \cdot \chi_{[t_1, t_3)}(t) \oplus D(t_3 - 0) \cdot \chi_{[t_3, t_5)}(t) \oplus ...$$

$$Q'(t) = y^0 \cdot \chi_{(-\infty, t_1)}(t) \oplus x^0 \cdot \chi_{[t_1, t_3)}(t) \oplus D(t_1 - 0) \cdot \chi_{[t_3, t_5)}(t) \oplus D(t_3 - 0) \cdot \chi_{[t_5, t_7)}(t) \oplus ...$$

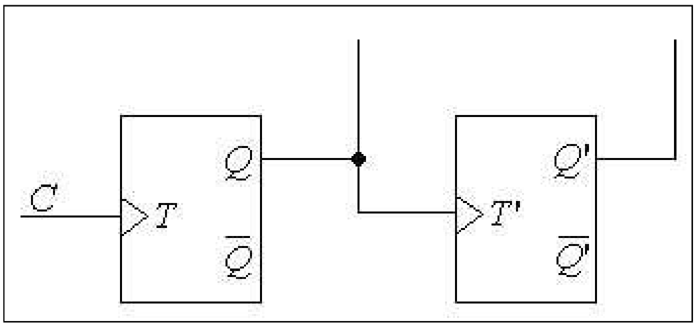

FIGURA 2. Numărător cu doi bi ţi

care se poate generaliza uşor la un registru de deplasare cu n biţi având intrarea serială şi ieşirea paralelă.

2. Numărător cu doi biţi în cascadă

Analizăm circuitul din Figura 2.

Pentru un şir nemărginit $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ ceasul e dat prin definiţie de ecuaţia

$$C(t) = \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus \chi_{[t_2,t_3)}(t) \oplus \chi_{[t_4,t_5)}(t) \oplus ...$$

În ecuaţiile (11.2) din Capitolul 14 ale bistabilelor stăpân-sclav T

$$C(t) \cdot (\overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cdot P(t) \cup Q(t-0) \cdot Q(t) \cdot \overline{P(t)}) \cup$$
$$\cup \overline{C(t)} \cdot (\overline{Q(t)} \cdot \overline{P(t-0)} \cdot \overline{P(t)} \cup Q(t) \cdot P(t-0) \cdot P(t)) = 1,$$
$$C'(t) \cdot (\overline{Q'(t-0)} \cdot \overline{Q'(t)} \cdot P'(t) \cup Q'(t-0) \cdot Q'(t) \cdot \overline{P'(t)}) \cup$$
$$\cup \overline{C'(t)} \cdot (\overline{Q'(t)} \cdot \overline{P'(t-0)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q'(t) \cdot P'(t-0) \cdot P'(t)) = 1$$

cerem ca să avem

$$Q(t) = C'(t).$$

După utilizarea acestei ultime ecuaţii, prin înmulţire, se obţine:

$$C(t) \cdot (\overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cdot P(t) \cdot (\overline{Q'(t)} \cdot \overline{P'(t-0)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q'(t) \cdot P'(t-0) \cdot P'(t)) \cup$$
$$\cup Q(t-0) \cdot Q(t) \cdot \overline{P(t)} \cdot (\overline{Q'(t-0)} \cdot \overline{Q'(t)} \cdot P'(t) \cup Q'(t-0) \cdot Q'(t) \cdot \overline{P'(t)})) \cup$$
$$\cup \overline{C(t)} \cdot (\overline{Q(t)} \cdot \overline{P(t-0)} \cdot \overline{P(t)} \cdot (\overline{Q'(t)} \cdot \overline{P'(t-0)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q'(t) \cdot P'(t-0) \cdot P'(t)) \cup$$
$$\cup Q(t) \cdot P(t-0) \cdot P(t) \cdot (\overline{Q'(t-0)} \cdot \overline{Q'(t)} \cdot P'(t) \cup Q'(t-0) \cdot Q'(t) \cdot \overline{P'(t)})) = 1.$$

Presupunem că următoarele condiţii iniţiale sunt îndeplinite:

$t \in (-\infty, t_0)$:

$$P(t) = Q(t) = P'(t) = Q'(t) = 0.$$

Alegerea acestor condiţii iniţiale produce o anumită pierdere a generalităţii, însă e necesară pentru un circuit care, pentru ca să numere corect, trebuie să înceapă numărătoarea de la 0.

Obţinem:

$t \in [t_0, t_1)$:

$$C(t) \cdot \overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cdot P(t) \cdot (\overline{Q'(t)} \cdot \overline{P'(t-0)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q'(t) \cdot P'(t-0) \cdot P'(t)) = 1,$$

$$\begin{aligned} C(t) &= 1, \\ Q(t) &= Q(t-0) = Q(t_0-0) = 0, P(t) = 1, \\ P'(t) &= P'(t-0) = Q'(t) = P'(t_0-0) = 0. \end{aligned}$$

$t \in [t_1, t_2)$:

$$\overline{C(t)} \cdot Q(t) \cdot P(t-0) \cdot P(t) \cdot (\overline{Q'(t-0)} \cdot \overline{Q'(t)} \cdot P'(t) \cup Q'(t-0) \cdot Q'(t) \cdot \overline{P'(t)}) = 1,$$

$$\begin{aligned} C(t) &= 0, \\ P(t) &= P(t-0) = Q(t) = P(t_1-0) = 1, \\ Q'(t) &= Q'(t-0) = Q'(t_1-0) = 0, P'(t) = \overline{Q'(t)} = 1. \end{aligned}$$

$t \in [t_2, t_3)$:

$$C(t) \cdot Q(t-0) \cdot Q(t) \cdot \overline{P(t)} \cdot (\overline{Q'(t-0)} \cdot \overline{Q'(t)} \cdot P'(t) \cup Q'(t-0) \cdot Q'(t) \cdot \overline{P'(t)}) = 1,$$

$$\begin{aligned} C(t) &= 1, \\ Q(t) &= Q(t-0) = Q(t_2-0) = 1, P(t) = 0, \\ Q'(t) &= Q'(t-0) = Q'(t_2-0) = 0, P'(t) = \overline{Q'(t)} = 1. \end{aligned}$$

$t \in [t_3, t_4)$:

$$\overline{C(t)} \cdot \overline{Q(t)} \cdot \overline{P(t-0)} \cdot \overline{P(t)} \cdot (\overline{Q'(t)} \cdot \overline{P'(t-0)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q'(t) \cdot P'(t-0) \cdot P'(t)) = 1,$$

$$\begin{aligned} C(t) &= 0, \\ P(t) &= P(t-0) = Q(t) = P(t_3-0) = 0, \\ P'(t) &= P'(t-0) = Q'(t) = P'(t_3-0) = 1. \end{aligned}$$

$t \in [t_4, t_5)$:

$$C(t) \cdot \overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cdot P(t) \cdot (\overline{Q'(t)} \cdot \overline{P'(t-0)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q'(t) \cdot P'(t-0) \cdot P'(t)) = 1,$$

$$\begin{aligned} C(t) &= 1, \\ Q(t) &= Q(t-0) = Q(t_4-0) = 0, P(t) = 1, \\ P'(t) &= P'(t-0) = Q'(t) = P'(t_4-0) = 1. \end{aligned}$$

$t \in [t_5, t_6)$:

$$\overline{C(t)} \cdot Q(t) \cdot P(t-0) \cdot P(t) \cdot (\overline{Q'(t-0)} \cdot \overline{Q'(t)} \cdot P'(t) \cup Q'(t-0) \cdot Q'(t) \cdot \overline{P'(t)}) = 1,$$

$$\begin{aligned} C(t) &= 0, \\ P(t) &= P(t-0) = Q(t) = P(t_5-0) = 1, \\ Q'(t) &= Q'(t-0) = Q'(t_5-0) = 1, P'(t) = \overline{Q'(t)} = 0. \end{aligned}$$

$t \in [t_6, t_7)$:

$$C(t) \cdot Q(t-0) \cdot Q(t) \cdot \overline{P(t)} \cdot (\overline{Q'(t-0)} \cdot \overline{Q'(t)} \cdot P'(t) \cup Q'(t-0) \cdot Q'(t) \cdot \overline{P'(t)}) = 1,$$

$$\begin{aligned} C(t) &= 1, \\ Q(t) &= Q(t-0) = Q(t_6-0) = 1, P(t) = 0, \\ Q'(t) &= Q'(t-0) = Q'(t_6-0) = 1, P'(t) = \overline{Q'(t)} = 0. \end{aligned}$$

$t \in [t_7, t_8)$:

$$\overline{C(t)} \cdot \overline{Q(t)} \cdot \overline{P(t-0)} \cdot \overline{P(t)} \cdot (\overline{Q'(t)} \cdot \overline{P'(t-0)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q'(t) \cdot P'(t-0) \cdot P'(t)) = 1,$$

$$\begin{aligned} C(t) &= 0, \\ P(t) &= P(t-0) = Q(t) = P(t_7 - 0) = 0, \\ P'(t) &= P'(t-0) = Q'(t) = P'(t_7 - 0) = 0. \end{aligned}$$

$t \in [t_8, t_9)$:

$$C(t) \cdot \overline{Q(t-0)} \cdot \overline{Q(t)} \cdot P(t) \cdot (\overline{Q'(t)} \cdot \overline{P'(t-0)} \cdot \overline{P'(t)} \cup Q'(t) \cdot P'(t-0) \cdot P'(t)) = 1,$$

$$\begin{aligned} C(t) &= 1, \\ Q(t) &= Q(t-0) = Q(t_8 - 0) = 0, P(t) = 1, \\ P'(t) &= P'(t-0) = Q'(t) = P'(t_8 - 0) = 0. \\ &\quad ... \end{aligned}$$

În acest moment ne oprim, deoarece calculul începe să se repete. Rezumăm cele anterior discutate prin următorul tabel:

t	$Q(t)$	$Q'(t)$
$(-\infty, t_0)$	0	0
$[t_0, t_1)$	0	0
$[t_1, t_2)$	1	0
$[t_2, t_3)$	1	0
$[t_3, t_4)$	0	1
$[t_4, t_5)$	0	1
$[t_5, t_6)$	1	1
$[t_6, t_7)$	1	1
$[t_7, t_8)$	0	0
$[t_8, t_9)$	0	0
	...	

Tabelul 1

Am obţinut că

$$2^0 \cdot Q(t) + 2^1 \cdot Q'(t) = \sum_{\substack{\text{mod } 4 \\ \xi \in (-\infty, t]}} C(\xi - 0) \cdot \overline{C(\xi)}.$$

În scrierea ultimei relaţii, s-a presupus că $0, 1 \in \mathbf{B}$ sunt aceleaşi ca şi $0, 1 \in \mathbf{N}$; Q reprezintă cifra unităţilor, în timp ce Q', cifra multiplilor lui 2. Simbolul $\sum\limits_{\text{mod } 4}$ sumează modulo 4 numărul de fronturi căzătoare a lui $C(t)$.

Circuitul din Figura 1 e generalizat la un numărător cu n biţi în cascadă, care numără modulo 2^n.

3. Modelul Mealy al circuitelor sincrone

Circuitul desenat în Figura 3 se numeşte **maşina Mealy**, de la numele lui G. H. Mealy care l-a utilizat pentru întâia oară în 1955.

Ceasul satisface

$$C(t) = \chi_{[t_0, t_1)}(t) \oplus \chi_{[t_2, t_3)}(t) \oplus \chi_{[t_4, t_5)}(t) \oplus ...$$

unde şirul $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ e nemărginit. Funcţiile Boolene cunoscute $F : \mathbf{B}^m \times \mathbf{B}^k \to \mathbf{B}^k$, $G : \mathbf{B}^m \times \mathbf{B}^k \to \mathbf{B}^n$ se numesc **funcţia stare viitoare** şi respectiv **funcţia de ieşire**, iar circuitul e descris prin următoarele ecuaţii:

(3.1) $$D(t) = D(-\infty + 0) \cdot \chi_{(-\infty, t_0)}(t) \oplus F(u(t), Q(t)) \cdot \chi_{[t_0, \infty)}(t),$$

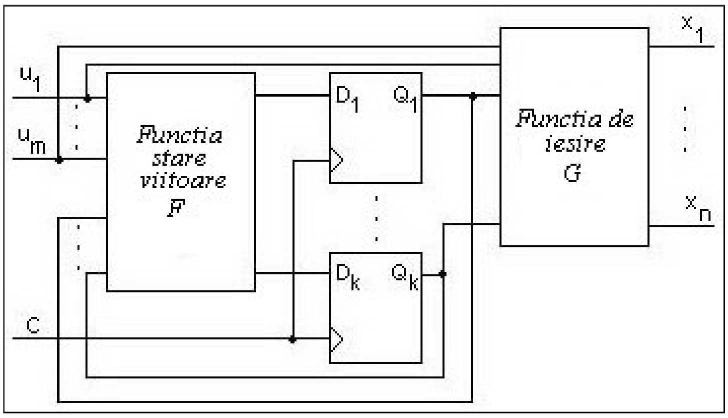

FIGURA 3. Modelul Mealy

(3.2) $Q(t) = Q(-\infty+0)\cdot\chi_{(-\infty,t_1)}(t)\oplus D(t_1-0)\cdot\chi_{[t_1,t_3)}(t)\oplus D(t_3-0)\cdot\chi_{[t_3,t_5)}(t)\oplus ...$

(3.3) $$x(t) = x(-\infty+0)\cdot\chi_{(-\infty,t_0)}(t)\oplus G(u(t),Q(t))\cdot\chi_{[t_0,\infty)}(t),$$

cu $u \in S^{(m)}$, $D, Q \in S^{(k)}$ şi $x \in S^{(n)}$. Înlocuim (3.2) în (3.1) pentru a obţine

(3.4) $$D(t) = D(-\infty+0)\cdot\chi_{(-\infty,t_0)}(t)\oplus F(u(t),Q(-\infty+0))\cdot\chi_{[t_0,t_1)}(t)\oplus$$
$$\oplus F(u(t),D(t_1-0))\cdot\chi_{[t_1,t_3)}(t)\oplus F(u(t),D(t_3-0))\cdot\chi_{[t_3,t_5)}(t)\oplus ...$$

şi din (3.4) se deduc valorile

$$D(t_1-0) = F(u(t_1-0),Q(-\infty+0)),$$
$$D(t_{2i+1}-0) = F(u(t_{2i+1}-0),D(t_{2i-1}-0)), i \geq 1$$

În acest moment calculăm valorile lui $Q(t)$ din (3.2):

$$Q(t_0) = Q(-\infty+0),$$
$$Q(t_{2i+1}) = D(t_{2i+1}-0), i \in \mathbf{N}$$

şi, ţinând cont de (3.3), obţinem

$$x(t_0) = G(u(t_0),Q(t_0)) = G(u(t_0),Q(-\infty+0)),$$
$$x(t_{2i+1}) = G(u(t_{2i+1}),Q(t_{2i+1})) = G(u(t_{2i+1}),D(t_{2i+1}-0)), i \in \mathbf{N}.$$

4. Modelul Moore al circuitelor sincrone

Avem circuitul din Figura 4, numit **maşină Moore** după numele lui E. F. Moore, care l-a folosit pentru prima dată în 1956.

Ceasul este prin definiţia de forma

$$C(t) = \chi_{[t_0,t_1)}(t)\oplus\chi_{[t_2,t_3)}(t)\oplus\chi_{[t_4,t_5)}(t)\oplus ...,$$

unde şirul $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ e nemărginit. Circuitul utilizează funcţiile $F : \mathbf{B}^m \times \mathbf{B}^k \to \mathbf{B}^k$, $G : \mathbf{B}^k \to \mathbf{B}^n$ numite **funcţia stare viitoare** şi **funcţia de ieşire**. Ecuaţiile sunt

$$D(t) = D(-\infty+0)\cdot\chi_{(-\infty,t_0)}(t)\oplus F(u(t),Q(t))\cdot\chi_{[t_0,\infty)}(t),$$

$$Q(t) = Q(-\infty+0)\cdot\chi_{(-\infty,t_1)}(t)\oplus D(t_1-0)\cdot\chi_{[t_1,t_3)}(t)\oplus D(t_3-0)\cdot\chi_{[t_3,t_5)}(t)\oplus ...,$$

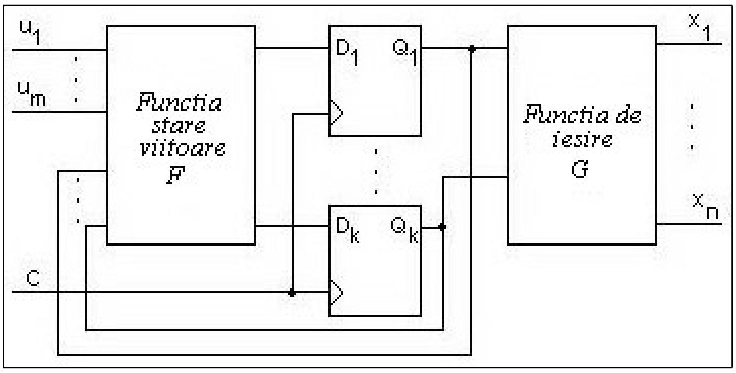

FIGURA 4. Modelul Moore

$$x(t) = x(-\infty + 0) \cdot \chi_{(-\infty, t_0)}(t) \oplus G(Q(t)) \cdot \chi_{[t_0, \infty)}(t),$$

cu $u \in S^{(m)}$, $D, Q \in S^{(k)}$ şi $x \in S^{(n)}$. Ca în secţiunea precedentă obţinem

$$D(t_1 - 0) = F(u(t_1 - 0), Q(-\infty + 0)),$$

$$D(t_{2i+1} - 0) = F(u(t_{2i+1} - 0), D(t_{2i-1} - 0)), i \geq 1$$

şi în cele din urmă

$$x(t_0) = G(Q(t_0)) = G(Q(-\infty + 0)),$$

$$x(t_{2i+1}) = G(Q(t_{2i+1})) = G(D(t_{2i+1} - 0)), i \in \mathbf{N}.$$

CAPITOLUL 16

Aplicaţii la teoria întârzierilor

1. Circuitul de întârziere

Simbolul circuitului de întârziere e dat în Figura 1. Menţionăm câteva posibilităţi de modelare ale acestui circuit care au apărut în Partea a doua a cărţii. În toate aceste exemple $u, x \in S$ sunt funcţiile de intrare şi respectiv de stare.

f_{UD} întârzierea nemărginită (întârzierea universală):

$$f_{UD}(u) = \begin{cases} S_c(0), u \in S_c(0) \\ S_c(1), u \in S_c(1) \\ S, u \in S \setminus S_c \end{cases}.$$

$f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ proprietatea de mărginire: $0 \leq m_r \leq d_r, 0 \leq m_f \leq d_f$ şi sistemul e

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi).$$

$f_{BD'}^{d_r,d_f}$ versiune a proprietăţii de mărginire (anume mărginire superioară şi nemărginire inferioară): $d_r > 0, d_f > 0$ şi e satisfăcut următorul sistem

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} u(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} u(\xi).$$

I_d întârzierea fixă (întârzierea ideală): pentru $d \geq 0$, relaţia dintre u şi x este

$$x(t) = u(t-d).$$

Intrarea şi stările lui $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$, $f_{BD'}^{d_r,d_f}$, I_d satisfac $u(-\infty+0) = x(-\infty+0)$.

$f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ proprietatea de inerţie absolută: există $\delta_r \geq 0, \delta_f \geq 0$ astfel încât x satisface

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r]} x(\xi),$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_f]} \overline{x(\xi)}.$$

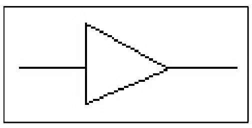

Figura 1. Simbolul circuitului de întârziere

$f_{AI'}^{\delta_r,\delta_f}$ proprietatea de inerţie absolută, versiune: există $\delta_r > 0, \delta_f > 0$ astfel încât

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_r)} x(\xi),$$
$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t, t+\delta_f)} \overline{x(\xi)}.$$

$f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ proprietatea de inerţie relativă: se dau $0 \leq \mu_r \leq \delta_r, 0 \leq \mu_f \leq \delta_f$ astfel încât

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} u(\xi),$$
$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t-\delta_f+\mu_f]} \overline{u(\xi)}.$$

$f_{RI'}^{\delta_r,\delta_f}$ proprietatea de inerţie relativă, versiune: pentru $\delta_r > 0, \delta_f > 0$ avem

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t)} u(\xi),$$
$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t)} \overline{u(\xi)}.$$

Proprietăţile inerţiale $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$, $f_{AI'}^{\delta_r,\delta_f}$, $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$, $f_{RI'}^{\delta_r,\delta_f}$ se adaugă uneia (se intersectează cu una) dintre întârzierile f_{UD}, $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$, $f_{BD'}^{d_r,d_f}$, I_d. Dăm două cazuri particulare de astfel de intersecţii.

$f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \cap f_{RI}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ întârziere mărginită relativ inerţială deterministă: sistemul ia forma

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi),$$
$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} \overline{u(\xi)}.$$

$f_{BD'}^{d,d} \cap f_{RI'}^{d,d}$ întârziere auto-duală relativ inerţială mărginită superior, nemărginită inferior, constând în ecuaţia

$$Dx(t) = (x(t-0) \oplus u(t-0)) \cdot \overline{\bigcup_{\xi \in (t-d,t)} Du(\xi)} \cdot \chi_{[t_0+d,\infty)}(t),$$

în care are loc $u(-\infty+0) = u_{|(-\infty,t_0)} = x_{|(-\infty,t_0)} = x(-\infty+0)$.

Câteva dintre sistemele precedente mai satisfac şi condiţii suplimentare de compatibilitate (i.e. existenţa unei soluţii pentru orice u).

2. Circuit cu feedback care foloseşte un element de întârziere

Sistemul a fost desenat în Figura 2. Firele sunt ideale şi toate întârzierile au fost concentrate în elementul de întârziere.

a) f_{UD}

Avem

$$\{x | x \in f_{UD}(x)\} = \{x | x \in \begin{cases} S_c(0), x \in S_c(0) \\ S_c(1), x \in S_c(1) \\ S, x \in S \setminus S_c \end{cases}\} = S.$$

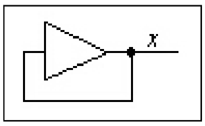

FIGURA 2. Circuit cu feedback

b) $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$

Presupunem că $\exists t_0 \in \mathbf{R}, x_{|(-\infty,t_0)} = 0$. Avem următoarele posibilităţi.

b.1) $d_f - m_f > 0$

Aceasta implică $t_0 - d_f + m_f < t_0$, deci $\bigcup\limits_{\xi \in [t_0 - d_f, t_0 - d_f + m_f]} x(\xi) = 0$ şi, de fapt, $\forall t \geq t_0$,

$$x(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} x(\xi) = 0.$$

Unica soluţie este $x = 0$.

b.2) $d_f - m_f = 0$

Pentru că inegalitatea $x(t) \leq \bigcup\limits_{\xi \in [t-d_f, t]} x(\xi)$ e îndeplinită de orice x, obţinem că afirmaţia $x \in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(x)$ e echivalentă cu

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} x(\xi) \leq x(t). \tag{2.1}$$

b.2.1) $d_r > 0$

Analizăm următoarele situaţii care reprezintă toate posibilităţile:

i) $x(t) = 0$;

ii) $x(t) = \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus \chi_{[t_3,t_4)}(t) \oplus ... \oplus \chi_{[t_{2k+1},t_{2k+2})}(t)$,

unde $k \in \mathbf{N}$ şi $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_{2k+1} < t_{2k+2}$. Calculăm

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} x(\xi) = \chi_{[t_1+d_r, t_2+d_r-m_r)}(t) \oplus \tag{2.2}$$

$$\oplus \chi_{[t_3+d_r, t_4+d_r-m_r)}(t) \oplus ... \oplus \chi_{[t_{2k+1}+d_r, t_{2k+2}+d_r-m_r)}(t),$$

unde în partea dreaptă a lui (2.2), un termen $\chi_{[t_{2i+1}+d_r, t_{2i+2}+d_r-m_r)}(t)$ e nul dacă $t_{2i+1} + d_r \geq t_{2i+2} + d_r - m_r$, i.e. dacă $t_{2i+2} - t_{2i+1} \leq m_r, i \in \{0, ..., k\}$. Pentru toţi $i \in \{0, ..., k\}$ cu $t_{2i+2} - t_{2i+1} > m_r$, (2.1) şi (2.2) implică existenţa lui $j \in \{i, ..., k\}$, astfel încât

$$[t_{2i+1} + d_r, t_{2i+2} + d_r - m_r) \subset [t_{2j+1}, t_{2j+2});$$

iii) $x(t) = \chi_{[t_1,\infty)}(t), t_1 \geq t_0$;

iv) $x(t) = \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus ... \oplus \chi_{[t_{2k+1},t_{2k+2})}(t) \oplus \chi_{[t_{2k+3},\infty)}(t)$,

unde $k \in \mathbf{N}$ şi $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_{2k+2} < t_{2k+3}$ iar analiza se face similar cu cea de la ii), ţinând cont că (2.2) e înlocuită prin

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} x(\xi) = \chi_{[t_1+d_r, t_2+d_r-m_r)}(t) \oplus ... \oplus \tag{2.3}$$

$$\oplus \chi_{[t_{2k+1}+d_r, t_{2k+2}+d_r-m_r)}(t) \oplus \chi_{[t_{2k+3}+d_r, \infty)}(t);$$

v) $x(t) = \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus \chi_{[t_3,t_4)}(t) \oplus ...$,

unde $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < ...$ e nemărginit şi

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} x(\xi)=\chi_{[t_1+d_r,t_2+d_r-m_r)}(t)\oplus\chi_{[t_3+d_r,t_4+d_r-m_r)}(t)\oplus ... \tag{2.4}$$

Pentru orice $i\in\mathbf{N}$ cu $t_{2i+2}-t_{2i+1}>m_r$, există un $j\geq i$ aşa ca

$$[t_{2i+1}+d_r,t_{2i+2}+d_r-m_r)\subset[t_{2j+1},t_{2j+2}).$$

Un caz particular al lui b.2.1) e acela când $m_r=0$; (2.1) ia forma

$$x(t-d_r)\leq x(t). \tag{2.5}$$

Atunci, pentru toţi $i\in\mathbf{N}$, e îndeplinită incluziunea

$$[t_{2i+1}+d_r,t_{2i+2}+d_r)\subset supp\ x.$$

De exemplu, funcţiile 'periodice'

$$x(t)=\chi_{[t_1,t_2)}(t)\oplus\chi_{[t_1+d_r,t_2+d_r)}(t)\oplus ...\oplus\chi_{[t_1+kd_r,t_2+kd_r)}(t)\oplus ...,$$

unde $t_0\leq t_1<t_2\leq t_1+d_r$, satisfac (2.5) deoarece

$$x(t-d_r)=\chi_{[t_1+d_r,t_2+d_r)}(t)\oplus\chi_{[t_1+2d_r,t_2+2d_r)}(t)\oplus ...\oplus\chi_{[t_1+(k+1)d_r,t_2+(k+1)d_r)}(t)\oplus ...$$

$f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}\cap f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ În cazul b.2.1), $d_f-m_f=0,d_r>0$ adaugă la cerinţele anterioare proprietăţile

$$\overline{x(t-0)}\cdot x(t)\leq\bigcap_{\xi\in[t-\delta_r,t-\delta_r+\mu_r]} x(\xi), \tag{2.6}$$

$$x(t-0)\cdot\overline{x(t)}\leq\bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]}\overline{x(\xi)} \tag{2.7}$$

care implică, atunci când $\delta_r>0$, că $x(t)=0$. Pentru $\delta_r=0$, inegalitatea (2.6) devine trivială: $\overline{x(t-0)}\cdot x(t)\leq x(t)$. Atunci, dacă $\delta_f>0$, restricţiile corespunzătoare lui $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ ale soluţiilor x sunt exprimate sub forma (vezi ipoteza v))

$$\chi_{\{t_2,t_4,...\}}(t)=x(t-0)\cdot\overline{x(t)}\leq$$

$$\leq\bigcap_{\xi\in[t-\delta_f,t-\delta_f+\mu_f]}\overline{x(\xi)}=\chi_{(-\infty,t_1+\delta_f-\mu_f)\cup[t_2+\delta_f,t_3+\delta_f-\mu_f)\cup[t_4+\delta_f,t_5+\delta_f-\mu_f)\cup...}(t)$$

sau, echivalent,

$$\{t_2,t_4,...\}\subset(-\infty,t_1+\delta_f-\mu_f)\cup[t_2+\delta_f,t_3+\delta_f-\mu_f)\cup[t_4+\delta_f,t_5+\delta_f-\mu_f)\cup...$$

$\delta_r=\delta_f=0$ înseamnă trivialitate pentru $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$.

O situaţie interesantă pentru $f_{BD}^{m_r,d_r,d_f,d_f}\cap f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ e cazul particular $\delta_r\geq m_r,\delta_f=0$, când incluziunea

$$[t_{2i+1}+d_r,t_{2i+2}+d_r-m_r)\subset supp\ x$$

este adevărată pentru toţi $i\in\mathbf{N}$ şi toate soluţiile x din v), proprietatea $t_{2i+2}-t_{2i+1}>\delta_r\geq m_r$ fiind satisfăcută datorită lui $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$.

b.2.2) $d_r=0$

În acest caz, (2.1) ia forma $x(t)\leq x(t)$ şi toţi $x\in S$ cu $x(-\infty+0)=0$ satisfac $x\in f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}(x)$.

Situaţia $\exists t_0\in\mathbf{R},x_{|(-\infty,t_0)}=1$ este analizată într-un mod dual.

c) $f_{BD'}^{d_r,d_f}$

Sistemul este

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} x(\xi) \leq x(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} x(\xi),$$

cu $d_r > 0, d_f > 0$. Fie $t_0 \in \mathbf{R}$ aşa încât $\forall t < t_0, x(t) = 0$. Pentru că $\bigcup_{\xi\in[t_0-d_f,t_0)} x(\xi) = 0$, obţinem $\forall t \geq t_0, x(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} x(\xi) = 0$. În mod similar, fie $t_0 \in \mathbf{R}$ astfel încât $\forall t < t_0, x(t) = 1$. Deoarece $\bigcap_{\xi\in[t_0-d_r,t_0)} x(\xi) = 1$, obţinem $\forall t \geq t_0, 1 = \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} x(\xi) \leq x(t)$. Valoarea t_0 a fost arbitrară mai înainte, aşa că singurele soluţii $x \in f_{BD'}^{d_r,d_f}(x)$ sunt funcţiile constante.

Pe de altă parte, funcţiile constante satisfac în mod trivial orice condiţie suplimentară de inerţie $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$, $f_{AI'}^{\delta_r,\delta_f}$, $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$, $f_{RI'}^{\delta_r,\delta_f}$ deoarece $\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = 0$.

d) I_d

Ecuaţia de rezolvat este

$$x(t) = x(t-d), d \geq 0.$$

Dacă $d > 0$, atunci soluţiile sunt cele două funcţii constante, iar dacă $d = 0$, atunci soluţiile sunt toate semnalele.

e) $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \cap f_{RI}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$

Sistemul este

$$\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t-d_r+m_r]} x(\xi), \tag{2.8}$$

$$x(t-0) \cdot \overline{x(t)} = x(t-0) \cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{x(\xi)} \tag{2.9}$$

şi presupunem ca mai înainte că $\exists t_0 \in \mathbf{R}, x_{|(-\infty,t_0)} = 0$.

e.1) $d_r > 0$

Soluţia unică este $x(t) = 0$, pentru că $\overline{x(t-0)} \cdot x(t) \leq x(t-d_r)$.

e.2) $d_r = 0$

e.2.1) $d_f = m_f > 0$

Comutarea de la 0 la 1 e posibilă, pentru că (2.8) ia forma trivială $\overline{x(t-0)} \cdot x(t) = \overline{x(t-0)} \cdot x(t)$. Din acest moment începând $\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t]} \overline{x(\xi)}$ e nulă. Aşadar soluţiile au una din formele $x(t) = 0, x(t) = \chi_{[t_1,\infty)}(t), t_1 \geq t_0$.

e.2.2) $d_f = m_f = 0$

Toate semnalele x satisfac sistemul, deoarece (2.8), (2.9) sunt ambele triviale.

e.2.3) $d_f > m_f \geq 0$

Comutarea de la 0 la 1 pare posibilă şi fie $t_1 \geq t_0$ momentul primei comutări de acest fel. Cu alte cuvinte $\overline{x(t_1-0)} \cdot x(t_1) = 1$. La orice moment de timp $t_2 > t_1$ caracterizat prin $[t_1, t_2) \subset supp\ x$, (2.9) devine

$$\overline{x(t_2)} = \bigcap_{\xi\in[t_2-d_f,t_2-d_f+m_f]} \overline{x(\xi)}. \tag{2.10}$$

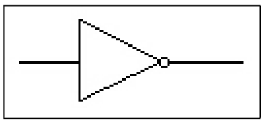

FIGURA 3. Simbolul porţii logice NU

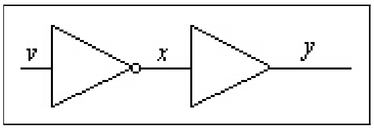

FIGURA 4. Primul model al porţii NU

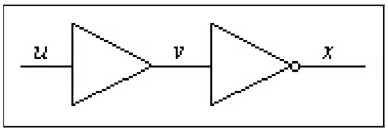

FIGURA 5. Al doilea model al porţii NU

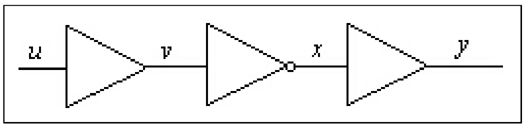

FIGURA 6. Al treilea model al porţii NU

Pentru toţi $t_2 - d_f + m_f < t_1$, i.e. dacă $0 < t_2 - t_1 < d_f - m_f$, partea dreaptă a lui (2.10) e 1 şi comutarea lui x de la 1 la 0 e necesară. Deoarece $x(t_1) = x(t_1 + 0)$, am găsit o contradicţie care arată că (2.8), (2.9) nu are soluţie $x(t) \neq 0$.

Analiza situaţiei când $\exists t_0 \in \mathbf{R}, x_{|(-\infty,t_0)} = 1$ e similară.

f) $f^{d,d}_{BD'} \cap f^{d,d}_{RI'}$

Soluţiile ecuaţiei

$$Dx(t) = 0$$

sunt funcţiile constante.

3. Poarta logică NU

Poarta logică NU care calculează complementul e simbolizată ca în Figura 3, unde poarta şi cele două fire sunt caracterizate de întârzieri. Ea e modelată de oricare dintre circuitele din Figurile 4, 5, 6, în care poarta logică e ideală

$$x(t) = x(-\infty + 0) \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{v(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{3.1}$$

la fel ca şi firele şi întârzierile sunt localizate în elementele de întârziere. Procesul de modelare trebuie să furnizeze relaţia dintre x, y şi/sau dintre u, v. Ultimul pas este eliminarea (atunci când e posibil) a variabilelor intermediare: x în Figura 4, v în Figura 5, v şi x în Figura 6. Dăm câteva exemple.

a) f_{UD} Figura 6

Faptul că u este de forma

$$u(t) = u(t) \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus u(t_0) \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t) \tag{3.2}$$

implică, deoarece $v \in f_{UD}(u)$, că v este de forma

$$v(t) = v(t) \cdot \chi_{(-\infty,t_1)}(t) \oplus u(t_0) \cdot \chi_{[t_1,\infty)}(t). \tag{3.3}$$

Din (3.1), există $t_2 \in \mathbf{R}$ aşa încât x este dat de

$$x(t) = x(t) \cdot \chi_{(-\infty,t_2)}(t) \oplus \overline{u(t_0)} \cdot \chi_{[t_2,\infty)}(t) \tag{3.4}$$

şi $y \in f_{UD}(x)$ este de forma

$$y(t) = y(t) \cdot \chi_{(-\infty,t_3)}(t) \oplus \overline{u(t_0)} \cdot \chi_{[t_3,\infty)}(t). \tag{3.5}$$

b) $f_{BD'}^{d_r,d_f}$ Figure 4

Există $t_0 \in \mathbf{R}$,$\lambda \in \mathbf{B}, \mu \in \mathbf{B}$ aşa încât $v_{|(-\infty,t_0)} = \lambda, x_{|(-\infty,t_0)} = y_{|(-\infty,t_0)} = \mu$ şi avem

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} x(\xi) \le y(t) \le \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} x(\xi). \tag{3.6}$$

Din (3.1) obţinem:

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} (\mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(\xi) \oplus \overline{v(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi)) \le y(t) \le \tag{3.7}$$
$$\le \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} (\mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(\xi) \oplus \overline{v(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi)).$$

c) $f_{BD'}^{d_r,d_f}$ Figura 5

$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \exists\lambda \in \mathbf{B}, \exists\mu \in \mathbf{B}$ cu proprietatea că $u_{|(-\infty,t_0)} = v_{|(-\infty,t_0)} = \lambda, x_{|(-\infty,t_0)} = \mu$. Putem scrie

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} u(\xi) \le v(t) \le \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} u(\xi), \tag{3.8}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{u(\xi)} \le \overline{v(t)} \le \bigcup_{\xi\in[t-d_r,t)} \overline{u(\xi)} \quad \text{(din (3.8))}, \tag{3.9}$$

$$\mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \bigcap_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{u(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t) \le x(t) \le \tag{3.10}$$
$$\le \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \bigcup_{\xi\in[t-d_r,t)} \overline{u(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t) \quad \text{(din (3.1), (3.9))}.$$

d) $f_{BD'}^{d,d} \cap f_{RI'}^{d,d}$ Figura 4

$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \exists\lambda \in \mathbf{B}, \exists\mu \in \mathbf{B}, v_{|(-\infty,t_0)} = \lambda, x_{|(-\infty,t_0)} = y_{|(-\infty,t_0)} = \mu$. Obţinem

$$x(t-0) = \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0]}(t) \oplus \overline{v(t-0)} \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t) \quad \text{(din (3.1))}, \tag{3.11}$$

$$Dx(t) = x(t-0) \oplus x(t) = \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0]}(t) \oplus \overline{v(t-0)} \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t) \oplus \tag{3.12}$$
$$\oplus \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{v(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t) \quad \text{(din (3.1), (3.11))}$$
$$= \mu \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus \overline{v(t-0)} \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t) \oplus \overline{v(t_0)} \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus \overline{v(t)} \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t)$$

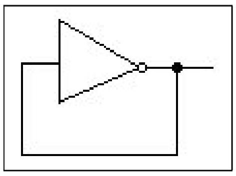

FIGURA 7. Circuit cu feedback

$$= (\mu \oplus \overline{v(t_0)}) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus (\overline{v(t-0)} \oplus \overline{v(t)}) \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t)$$

$$= (\overline{\mu \oplus v(t_0)}) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus Dv(t) \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t),$$

$$Dy(t) = (y(t-0) \oplus x(t-0)) \cdot \overline{\bigcup_{\xi \in (t-d,t)} Dx(\xi)} \cdot \chi_{[t_0+d,\infty)}(t) \quad \text{(ipoteza)} \tag{3.13}$$

$$= (y(t-0) \oplus \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0]}(t) \oplus \overline{v(t-0)} \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t)) \cdot$$

$$\cdot \overline{\bigcup_{\xi \in (t-d,t)} (\overline{\mu \oplus v(t_0)} \cdot \chi_{\{t_0\}}(\xi) \oplus Dv(\xi) \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(\xi))} \cdot \chi_{[t_0+d,\infty)}(t) \text{ (din (3.11), (3.12))}$$

$$= \overline{y(t-0) \oplus v(t-0)} \cdot \overline{\bigcup_{\xi \in (t-d,t)} Dv(\xi)} \cdot \chi_{[t_0+d,\infty)}(t).$$

e) $f^{d,d}_{BD'} \cap f^{d,d}_{RI'}$ Figura 5

$\exists t_0 \in \mathbf{R}, \exists \lambda \in \mathbf{B}, \exists \mu \in \mathbf{B}, u_{|(-\infty,t_0)} = v_{|(-\infty,t_0)} = \lambda, x_{|(-\infty,t_0)} = \mu$. Ecuaţiile sunt

$$v(t) \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t) = \overline{x(t)} \oplus \overline{\mu} \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \quad \text{(din (3.1))}, \tag{3.14}$$

$$v(t-0) \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t) = \overline{x(t-0)} \oplus \overline{\mu} \cdot \chi_{(-\infty,t_0]}(t) \quad \text{(din (3.14))} \tag{3.15}$$

$$= (\overline{x(t-0)} \oplus \overline{\mu}) \cdot \chi_{(-\infty,t_0]}(t) \oplus \overline{x(t-0)} \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t),$$

$$Dv(t) = (v(t-0) \oplus u(t-0)) \cdot \overline{\bigcup_{\xi \in (t-d,t)} Du(\xi)} \cdot \chi_{[t_0+d,\infty)}(t) \text{ (ipoteza)}, \tag{3.16}$$

$$Dx(t) = (\overline{\mu \oplus v(t_0)}) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus Dv(t) \cdot \chi_{(t_0,\infty)}(t) \text{ (vezi (3.12))} \tag{3.17}$$

$$= (\overline{\mu \oplus v(t_0)}) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus (v(t-0) \oplus u(t-0)) \cdot \overline{\bigcup_{\xi \in (t-d,t)} Du(\xi)} \cdot \chi_{[t_0+d,\infty)}(t) \text{ (din (3.16))}$$

$$= (\overline{\mu \oplus v(t_0)}) \cdot \chi_{\{t_0\}}(t) \oplus \overline{x(t-0) \oplus u(t-0)} \cdot \overline{\bigcup_{\xi \in (t-d,t)} Du(\xi)} \cdot \chi_{[t_0+d,\infty)}(t) \text{ (din (3.15))}.$$

Ni se pare interesantă o comparaţie între formele lui (3.13) şi (3.17).

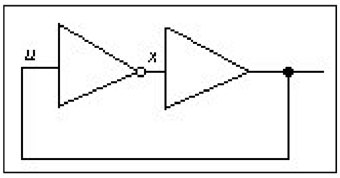

FIGURA 8

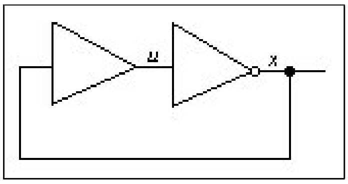

FIGURA 9

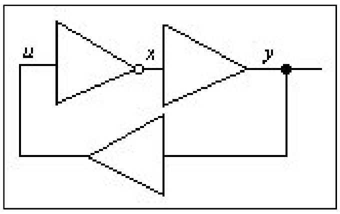

FIGURA 10

4. Circuit cu feedback care foloseşte o poartă logică NU

Circuitul e acela din Figura 7, unde poarta logică NU şi firele au întârzieri. Modul în care modelăm acest circuit e descris în Figurile 8, 9, 10, în care poarta logică şi firele nu au întârzieri, iar întârzierile au fost concentrate în elementele de întârziere. În Figurile 8, 9 avem existenţa unor $t_0 \in \mathbf{R}$ şi $\mu \in \mathbf{B}$ cu proprietatea că

$$u(t) = \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus u(t) \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{4.1}$$

$$x(t) = \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{u(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{4.2}$$

în timp ce în Figura 10 avem, în plus faţă de (4.1), (4.2), satisfăcută relaţia

$$y(t) = \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus y(t) \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t). \tag{4.3}$$

a) f_{UD} Figura 8

Presupunem că x este de forma

$$x(t) = x(t) \cdot \chi_{(-\infty,t_1)}(t) \oplus x(t_1) \cdot \chi_{[t_1,\infty)}(t). \tag{4.4}$$

Din $u \in f_{UD}(x)$, acesta arată că u este de forma

$$u(t) = u(t) \cdot \chi_{(-\infty,t_2)}(t) \oplus u(t_2) \cdot \chi_{[t_2,\infty)}(t), \tag{4.5}$$

unde

$$x(t_1) = u(t_2), \tag{4.6}$$

pentru nişte $t_1 \in \mathbf{R}, t_2 \in \mathbf{R}$. Pe de altă parte, (4.2),(4.4) şi (4.5) arată că

$$x(t_1) = \overline{u(t_2)}. \tag{4.7}$$

(4.6) şi (4.7) sunt contradictorii, însemnând falsitatea ipotezei (4.4). Concluzionăm că circuitul e instabil şi, în loc de (4.4), putem scrie

$$x(t) = \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{\mu} \cdot \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus \mu \cdot \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus \overline{\mu} \cdot \chi_{[t_2,t_3)}(t) \oplus ..., \tag{4.8}$$

unde $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ e un şir nemărginit.

b) $f_{BD'}^{d_r,d_f}$ Figura 8

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} x(\xi) \leq u(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} x(\xi) \tag{4.9}$$

şi dacă substituim (4.2) în (4.9) pentru $\mu = 0$ obţinem

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} \overline{u(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi) \leq u(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{u(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi). \tag{4.10}$$

Presupunem că soluţia lui (4.10) este de forma

$$u(t) = \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus \chi_{[t_3,t_4)}(t) \oplus ..., \tag{4.11}$$

unde $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < ...$ e un şir nemărginit pe care încercăm să-l caracterizăm în cele ce urmează. Avem

$$\overline{u(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t) = \chi_{[t_0,t_1)}(t) \oplus \chi_{[t_2,t_3)}(t) \oplus ..., \tag{4.12}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} \overline{u(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi) = \chi_{[t_0+d_r,t_1]}(t) \oplus \chi_{[t_2+d_r,t_3]}(t) \oplus ..., \tag{4.13}$$

$$\bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{u(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi) = \chi_{(t_0,t_1+d_f)}(t) \cup \chi_{(t_2,t_3+d_f)}(t) \cup ... \tag{4.14}$$

şi, ţinând cont de (4.11), (4.13), (4.14), inegalitatea (4.10) devine

$$\begin{aligned}[t_0 + d_r, t_1] \cup [t_2 + d_r, t_3] \cup ... \subset [t_1, t_2) \cup [t_3, t_4) \cup ... \subset \\ \subset (t_0, t_1 + d_f) \cup (t_2, t_3 + d_f) \cup ...\end{aligned} \tag{4.15}$$

În (4.15) oricare dintre mulţimile $[t_0 + d_r, t_1]$, $[t_2 + d_r, t_3], ...$ poate fi vidă dacă $t_0 + d_r > t_1, t_2 + d_r > t_3, ...$ şi oricare dintre mulţimile $(t_0, t_1 + d_f)$, $(t_2, t_3 + d_f), ...$ se pot intersecta două câte două dacă $t_1 + d_f > t_2, t_3 + d_f > t_4, ...$

Incluziunea stângă a lui (4.15) e satisfăcută dacă una dintre următoarele proprietăţi e îndeplinită:

- $t_0 + d_r > t_1$ ($[t_0 + d_r, t_1] = \emptyset$) sau $t_0 + d_r = t_1$ ($[t_0 + d_r, t_1] = \{t_1\} \subset [t_1, t_2)$),
- $t_2 + d_r > t_3$ ($[t_2 + d_r, t_3] = \emptyset$) sau $t_2 + d_r = t_3$ ($[t_2 + d_r, t_3] = \{t_3\} \subset [t_3, t_4)$),

...

în timp de incluziunea dreaptă a lui (4.15) e satisfăcută dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate:

- $t_1 > t_0$,
- $t_1+d_f \leq t_2$ şi $t_2 \leq t_1+d_f$ ($(t_0, t_1+d_f)\cap(t_2, t_3+d_f) = \emptyset$ şi $[t_1, t_2) \subset (t_0, t_1+d_f)$) sau $t_1+d_f > t_2$ ($(t_0, t_1+d_f)\cap(t_2, t_3+d_f) \neq \emptyset$ şi $[t_1, t_2) \subset (t_0, t_1+d_f)\cup(t_2, t_3+d_f)$),
- $t_3+d_f \leq t_4$ şi $t_4 \leq t_3+d_f$ ($(t_2, t_3+d_f)\cap(t_4, t_5+d_f) = \emptyset$ şi $[t_3, t_4) \subset (t_2, t_3+d_f)$) sau $t_3+d_f > t_4$ ($(t_2, t_3+d_f)\cap(t_4, t_5+d_f) \neq \emptyset$ şi $[t_3, t_4) \subset (t_2, t_3+d_f)\cup(t_4, t_5+d_f)$),

...

i.e. în şirul nemărginit $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ avem

$$\forall k \in \mathbf{N}, t_{2k+1} - t_{2k} \leq d_r, t_{2k+2} - t_{2k+1} \leq d_f \tag{4.16}$$

Substituţia lui (4.2) în (4.9), pentru $\mu = 1$, dă

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r,t)} \chi_{(-\infty,t_0)}(\xi) \oplus \overline{u(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi) \leq u(t) \leq \tag{4.17}$$

$$\leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f,t)} \chi_{(-\infty,t_0)}(\xi) \oplus \overline{u(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi),$$

cu o soluţie de forma

$$u(t) = \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \chi_{[t_1,t_2)}(t) \oplus \chi_{[t_3,t_4)}(t) \oplus ..., \tag{4.18}$$

unde şirul $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < ...$ e nemărginit. În cele din urmă obţinem că $t_0 = t_1$ şi (4.16) e în continuare adevărată.

Adăugarea lui $f_{AI}^{\delta_r,\delta_f}$ la modelul de întârziere mărginit superior, nemărginit inferior dă lungimea minimă a 0-impulsurilor şi respectiv a 1-impulsurilor în (4.11): $\forall k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \delta_f &< t_{2k+3} - t_{2k+2}, \\ \delta_r &< t_{2k+2} - t_{2k+1}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

iar în (4.18), cu $t_0 = t_1$, $\forall k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \delta_f &< t_{2k+3} - t_{2k+2}, \\ \delta_r &< t_{2k+4} - t_{2k+3}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

$f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$ adaugă lui (4.9) cele două cerinţe

$$\overline{u(t-0)} \cdot u(t) \leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} x(\xi), \tag{4.21}$$

$$u(t-0) \cdot \overline{u(t)} \leq \bigcap_{\xi \in [t-\delta_f, t-\delta_f+\mu_f]} \overline{x(\xi)}. \tag{4.22}$$

(4.2) cu $\mu = 0$ şi (4.11) dau

$$\bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} x(\xi) = \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} \overline{u(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi) \tag{4.23}$$

$$= \bigcap_{\xi \in [t-\delta_r, t-\delta_r+\mu_r]} (\chi_{[t_0,t_1)}(\xi) \oplus \chi_{[t_2,t_3)}(\xi) \oplus \chi_{[t_4,t_5)}(\xi) \oplus ...)$$

$$= \chi_{[t_0+\delta_r, t_1+\delta_r-\mu_r)}(t) \oplus \chi_{[t_2+\delta_r, t_3+\delta_r-\mu_r)}(t) \oplus \chi_{[t_4+\delta_r, t_5+\delta_r-\mu_r)}(t) \oplus ...$$

iar inegalitatea (4.21)

$$\overline{u(t-0)} \cdot u(t) = \chi_{\{t_1,t_3,t_5,...\}}(t) \leq$$

$$\leq \chi_{[t_0+\delta_r, t_1+\delta_r-\mu_r)}(t) \oplus \chi_{[t_2+\delta_r, t_3+\delta_r-\mu_r)}(t) \oplus \chi_{[t_4+\delta_r, t_5+\delta_r-\mu_r)}(t) \oplus ...$$

este echivalentă cu

$$\{t_1, t_3, t_5, ...\} \subset [t_0+\delta_r, t_1+\delta_r-\mu_r) \cup [t_2+\delta_r, t_3+\delta_r-\mu_r) \cup [t_4+\delta_r, t_5+\delta_r-\mu_r) \cup ...$$

În mod similar, din (4.2) cu $\mu = 0$, (4.11) şi (4.22), obţinem

$$\{t_2, t_4, t_6, ...\} \subset (-\infty, t_0+\delta_f-\mu_f) \cup [t_1+\delta_f, t_2+\delta_f-\mu_f) \cup [t_3+\delta_f, t_4+\delta_f-\mu_f) \cup ...$$

Observăm că, pentru ca ultimele incluziuni să fie adevărate două condiţii necesare sunt $\delta_r - \mu_r > 0$ şi respectiv $\delta_f - \mu_f > 0$.

Ecuaţia (4.18), reprezentând cazul $\mu = 1$ combinată cu $f_{RI}^{\mu_r,\delta_r,\mu_f,\delta_f}$, duce la concluzii de aceeaşi natură.

c) I_d Figura 10

(4.1), (4.2), (4.3) împreună cu

$$y(t) = x(t - d_1), \tag{4.24}$$

$$u(t) = y(t - d_2) \tag{4.25}$$

sunt adevărate unde $d_1 \geq 0, d_2 \geq 0$. Prin eliminarea lui u, x obţinem

$$\begin{aligned} y(t) = \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0+d_1)}(t) \oplus \overline{\mu} \cdot \chi_{[t_0+d_1,t_0+d_1+d_2)}(t) \oplus \\ \oplus \overline{y(t-d_1-d_2)} \cdot \chi_{[t_0+d_1+d_2,\infty)}(t). \end{aligned} \tag{4.26}$$

c.1) $d_1 + d_2 = 0$

Ecuaţia (4.26) e incompatibilă.

c.2) $d_1 + d_2 > 0$

Soluţia lui (4.26) este

$$\begin{aligned} y(t) = \mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0+d_1)}(t) \oplus \overline{\mu} \cdot \chi_{[t_0+d_1,t_0+2d_1+d_2)}(t) \oplus \\ \oplus \mu \cdot \chi_{[t_0+2d_1+d_2,t_0+3d_1+2d_2)}(t) \oplus \overline{\mu} \cdot \chi_{[t_0+3d_1+2d_2,t_0+4d_1+3d_2)}(t) \oplus ... \end{aligned} \tag{4.27}$$

d) $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f} \cap f_{RI}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ Figura 9

(4.1), (4.2) sunt adevărate împreună cu

$$\overline{u(t-0)} \cdot u(t) = \overline{u(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r,t-d_r+m_r]} x(\xi), \tag{4.28}$$

$$u(t-0) \cdot \overline{u(t)} = u(t-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_f,t-d_f+m_f]} \overline{x(\xi)} \tag{4.29}$$

unde $0 \leq m_r \leq d_r$, $0 \leq m_f \leq d_f$. Prin eliminarea lui x, obţinem

$$\overline{u(t-0)} \cdot u(t) = \overline{u(t-0)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r,t-d_r+m_r]} (\mu \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(\xi) \oplus \overline{u(\xi)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi)), \tag{4.30}$$

$$u(t-0) \cdot \overline{u(t)} = u(t-0) \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_f,t-d_f+m_f]} (\overline{\mu} \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(\xi) \oplus u(\xi) \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(\xi)). \tag{4.31}$$

Presupunem că $\mu = 0$.

d.1) $d_r - m_r > 0, d_f - m_f > 0$

Pentru că în (4.30) avem $\forall \xi \in [t_0, t_0 + d_r), u(\xi) = 0$, implicaţia este $u(t_0 + d_r) = 1$. Deoarece în (4.31) avem $\forall \xi \in [t_0 + d_r, t_0 + d_r + d_f), u(\xi) = 1$, deducem că $u(t_0 + d_r + d_f) = 0$ etc. Soluţia e

$$\begin{aligned} u(t) = \chi_{[t_0+d_r,t_0+d_r+d_f)}(t) \oplus \chi_{[t_0+2d_r+d_f,t_0+2d_r+2d_f)}(t) \oplus \\ \oplus \chi_{[t_0+3d_r+2d_f,t_0+3d_r+3d_f)}(t) \oplus ..., \end{aligned} \tag{4.32}$$

i.e. din (4.2)

$$x(t) = \overline{u(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t) = \chi_{[t_0,t_0+d_r)}(t) \oplus \chi_{[t_0+d_r+d_f,t_0+2d_r+d_f)}(t) \oplus \tag{4.33}$$

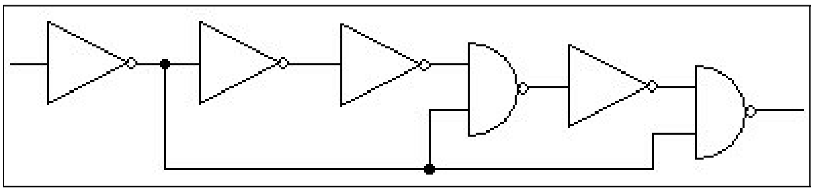

FIGURA 11. O linie de întârziere

$$\oplus\chi_{[t_0+2d_r+2d_f,t_0+3d_r+2d_f)}(t)\oplus ...$$

d.2) $d_r - m_r = 0$ *sau* $d_f - m_f = 0$

Presupunem că are loc $d_r = m_r > 0$. În această situaţie, (4.30) este

$$\overline{u(t-0)}\cdot u(t) = \overline{u(t-0)}\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t]} \overline{u(\xi)}\cdot\chi_{[t_0,\infty)}(\xi) = \tag{4.34}$$

$$= \overline{u(t-0)}\cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} \overline{u(\xi)}\cdot\chi_{[t_0,\infty)}(\xi)\cdot\overline{u(t)}.$$

Pentru $t < t_0 + d_r, u(t) = 0$ şi în $t = t_0 + d_r$, obţinem contradicţia $u(t_0 + d_r) = \overline{u(t_0 + d_r)}$. Sistemul este incompatibil. Posibilităţile $d_r = m_r = 0, d_f = m_f > 0, d_f = m_f = 0$ dau şi ele sisteme incompatibile.

Situaţia $\mu = 1$ e tratată similar.

e) $f^{d,d}_{BD'} \cap f^{d,d}_{RI'}$ Figura 10

Sunt adevărate relaţiile (4.1), (4.2), (4.3) împreună cu

$$Dy(t) = (y(t-0)\oplus x(t-0))\cdot \overline{\bigcup_{\xi\in(t-d_1,t)} Dx(\xi)}\cdot\chi_{[t_0+d_1,\infty)}(t), \tag{4.35}$$

$$Du(t) = (u(t-0)\oplus y(t-0))\cdot \overline{\bigcup_{\xi\in(t-d_2,t)} Dy(\xi)}\cdot\chi_{[t_0+d_2,\infty)}(t) \tag{4.36}$$

unde $d_1 > 0, d_2 > 0$.

Presupunem că $\mu = 0$. Atunci (4.36) dă $Du(t_0) = 0$, i.e. $u(t_0) = 0$.

Din (4.2), $x(t_0) = 1$. Din (4.35), y devine 1 în momentul de timp $t_0 + d_1$. Din (4.36), u devine 1 la momentul de timp $t_0 + d_1 + d_2$, când în (4.2) x devine 0. Concluzia e:

$$x(t) = \chi_{[t_0,t_0+d_1+d_2)}(t)\oplus\chi_{[t_0+2d_1+2d_2,t_0+3d_1+3d_2)}(t)\oplus ..., \tag{4.37}$$

$$y(t) = \chi_{[t_0+d_1,t_0+2d_1+d_2)}(t)\oplus\chi_{[t_0+3d_1+2d_2,t_0+4d_1+3d_2)}(t)\oplus ..., \tag{4.38}$$

$$u(t) = \chi_{[t_0+d_1+d_2,t_0+2d_1+2d_2)}(t)\oplus\chi_{[t_0+3d_1+3d_2,t_0+4d_1+4d_2)}(t)\oplus ... \tag{4.39}$$

Situaţia $\mu = 1$ e similară.

În acest caz, soluţiile sunt aceleaşi ca la c), modelul I_d.

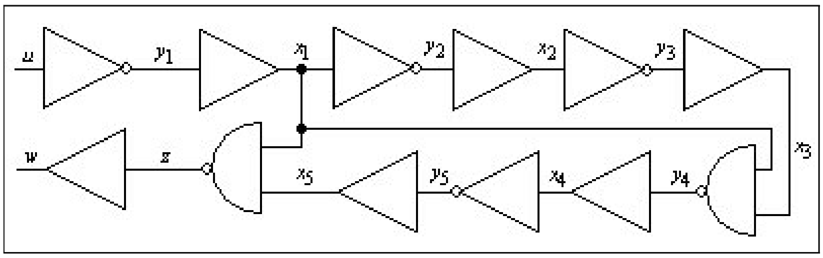

FIGURA 12. Modelul liniei de întârziere

5. O linie de întârziere pentru fronturile căzătoare

Circuitul propus în Figura 11 şi care e reprodus din [**14**] are porţile şi firele caracterizate de întârzieri. Modelul e oferit de circuitul din Figura 12, în care toate variabilele sunt semnale, porţile şi firele nu au întârzieri şi întârzierile sunt concentrate în elementele de întârziere.

Din punct de vedere static, dacă am fi avut $u, x_1, y_1, ..., x_5, y_5, z, w \in \mathbf{B}$, remarcăm că

$$x_3 = y_3 = \overline{x_2} = \overline{y_2} = x_1, \tag{5.1}$$

$$x_5 = y_5 = \overline{x_4} = \overline{y_4} = \overline{\overline{x_1 \cdot x_3}} = x_1 \cdot x_3, \tag{5.2}$$

$$w = z = \overline{x_1 \cdot x_5} \overset{(5.2)}{=} \overline{x_1 \cdot x_3} \overset{(5.1)}{=} \overline{x_1} = \overline{y_1} = u, \tag{5.3}$$

i.e. funcţia Booleană pe care o calculează acest circuit e identitatea.

Ne întoarcem la situaţia generală când toate variabilele sunt semnale. Există $t_0 \in \mathbf{R}$ şi $\mu_0, ..., \mu_6 \in \mathbf{B}$ astfel încât $u_{|(-\infty,t_0)} = \mu_0, y_{i|(-\infty,t_0)} = x_{i|(-\infty,t_0)} = \mu_i, i = \overline{1,5}, z_{|(-\infty,t_0)} = w_{|(-\infty,t_0)} = \mu_6$ şi sistemul de ecuaţii şi inecuaţii este

$$y_1(t) = \mu_1 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{u(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{5.4}$$

$$y_2(t) = \mu_2 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{x_1(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{5.5}$$

$$y_3(t) = \mu_3 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{x_2(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{5.6}$$

$$y_4(t) = \mu_4 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{x_1(t) \cdot x_3(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{5.7}$$

$$y_5(t) = \mu_5 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{x_4(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{5.8}$$

$$z(t) = \mu_6 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{x_1(t) \cdot x_5(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{5.9}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r,t)} y_i(\xi) \leq x_i(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f,t)} y_i(\xi), i = \overline{1,5}, \tag{5.10}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r,t)} z(\xi) \leq w(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f,t)} z(\xi). \tag{5.11}$$

Utilizăm deci modelul $f_{BD'}^{d_r,d_f}$ cu $d_r > 0, d_f > 0$, parametrii care caracterizează toate cele şase elemente de întârziere. Pentru o mai uşoară analiză a circuitului, facem ipoteza simplificatoare $\exists \mu \in \mathbf{B}, \mu_0 = \mu_2 = \mu_4 = \mu_6 = \mu$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \overline{\mu}$, pentru care (5.4),...,(5.9) devin

$$y_1(t) = \overline{u(t)}, \tag{5.12}$$

$$y_2(t) = \overline{x_1(t)}, \tag{5.13}$$

$$y_3(t) = \overline{x_2(t)}, \tag{5.14}$$

$$y_4(t) = \overline{x_3(t) \cdot x_1(t)}, \tag{5.15}$$

$$y_5(t) = \overline{x_4(t)}, \tag{5.16}$$

$$z(t) = \overline{x_5(t) \cdot x_1(t)}. \tag{5.17}$$

Avem

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} y_1(\xi) \le x_1(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} y_1(\xi) \quad \text{(ecuaţia (5.10))}, \tag{5.18}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} \overline{u(\xi)} \le x_1(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} \overline{u(\xi)} \quad \text{(din (5.12) şi (5.18))}, \tag{5.19}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} y_3(\xi) \le x_3(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} y_3(\xi) \quad \text{(ecuaţia (5.10))}, \tag{5.20}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} \overline{x_2(\xi)} \le x_3(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} \overline{x_2(\xi)} \quad \text{(din (5.14) şi (5.20))}, \tag{5.21}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} y_2(\xi) \le x_2(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} y_2(\xi) \quad \text{(ecuaţia (5.10))}, \tag{5.22}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_f, t)} \overline{y_2(\xi)} \le \overline{x_2(t)} \le \bigcup_{\xi \in [t-d_r, t)} \overline{y_2(\xi)} \quad \text{(din (5.22))}, \tag{5.23}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_f, t)} x_1(\xi) \le \overline{x_2(t)} \le \bigcup_{\xi \in [t-d_r, t)} x_1(\xi) \quad \text{(din (5.13) şi (5.23))}, \tag{5.24}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r-d_f, t)} x_1(\xi) \le x_3(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-d_r-d_f, t)} x_1(\xi) \quad \text{(din (5.21) şi (5.24))}, \tag{5.25}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-2d_r-d_f, t)} \overline{u(\xi)} \le x_3(t) \le \bigcup_{\xi \in [t-d_r-2d_f, t)} \overline{u(\xi)} \quad \text{(din (5.19) şi (5.25))}, \tag{5.26}$$

$$\overline{y_4(t)} = x_3(t) \cdot x_1(t) \quad \text{(din (5.15))}, \tag{5.27}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-2d_r-d_f, t)} \overline{u(\xi)} \cdot \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} \overline{u(\xi)} \le \overline{y_4(t)} \le \bigcup_{\xi \in [t-d_r-2d_f, t)} \overline{u(\xi)} \cdot \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t)} \overline{u(\xi)} \tag{5.28}$$

din (5.26), (5.19) şi (5.27). Dar $[t-2d_r-d_f, t) \supset [t-d_r, t)$, $[t-d_r-2d_f, t) \supset [t-d_f, t)$ implică

$$\bigcap_{\xi \in [t-2d_r-d_f, t)} \overline{u(\xi)} \le \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t)} \overline{u(\xi)},$$

$$\bigcup_{\xi\in[t-d_r-2d_f,t)} \overline{u(\xi)} \geq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{u(\xi)},$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-2d_r-d_f,t)} \overline{u(\xi)} \cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} \overline{u(\xi)} = \bigcap_{\xi\in[t-2d_r-d_f,t)} \overline{u(\xi)},$$

$$\bigcup_{\xi\in[t-d_r-2d_f,t)} \overline{u(\xi)} \cdot \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{u(\xi)} = \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{u(\xi)},$$

de unde (5.28) devine

$$\bigcap_{\xi\in[t-2d_r-d_f,t)} \overline{u(\xi)} \leq \overline{y_4(t)} \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{u(\xi)}. \tag{5.29}$$

Mai departe:

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} y_5(\xi) \leq x_5(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} y_5(\xi) \quad \text{(ecuaţia (5.10))}, \tag{5.30}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} \overline{x_4(\xi)} \leq x_5(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{x_4(\xi)} \quad \text{(din (5.16) şi (5.30))}, \tag{5.31}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{y_4(\xi)} \leq \overline{x_4(t)} \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_r,t)} \overline{y_4(\xi)} \quad \text{(similar cu (5.23))}, \tag{5.32}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r-d_f,t)} \overline{y_4(\xi)} \leq x_5(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_r-d_f,t)} \overline{y_4(\xi)} \quad \text{(din (5.31) şi (5.32))}, \tag{5.33}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-3d_r-2d_f,t)} \overline{u(\xi)} \leq x_5(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_r-2d_f,t)} \overline{u(\xi)} \quad \text{(din (5.29) şi (5.33))}, \tag{5.34}$$

$$\overline{z(t)} = x_5(t) \cdot x_1(t) \quad \text{(din (5.17))}, \tag{5.35}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-3d_r-2d_f,t)} \overline{u(\xi)} \cdot \bigcap_{\xi\in[t-d_r,t)} \overline{u(\xi)} \leq \overline{z(t)} \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_r-2d_f,t)} \overline{u(\xi)} \cdot \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{u(\xi)} \tag{5.36}$$

din (5.35), (5.34) şi (5.19). Cu argumente ca acelea pentru (5.28) din (5.36) deducem

$$\bigcap_{\xi\in[t-3d_r-2d_f,t)} \overline{u(\xi)} \leq \overline{z(t)} \leq \bigcup_{\xi\in[t-d_f,t)} \overline{u(\xi)}. \tag{5.37}$$

Aşadar

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_f,t)} u(\xi) \leq z(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-3d_r-2d_f,t)} u(\xi). \tag{5.38}$$

Din (5.11) şi (5.38) obţinem

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r-d_f,t)} u(\xi) \leq w(t) \leq \bigcup_{\xi\in[t-3d_r-3d_f,t)} u(\xi). \tag{5.39}$$

Concluzia exprimată prin (5.39) e aceea că circuitul creşte marginea superioară a întârzierii crescătoare a unei porţi de la d_r la $d_r + d_f$ şi marginea superioară a întârzierii descrescătoare de la d_f la $3d_r + 3d_f$, i.e. creşterea întârzierii descrescătoare e mai mare decât creşterea întârzierii crescătoare. Acest lucru justifică titlul secţiunii prezente.

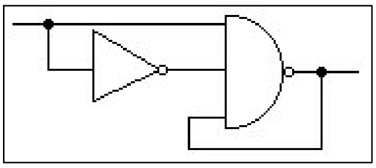

FIGURA 13. Circuit cu oscilaţii tranzitorii

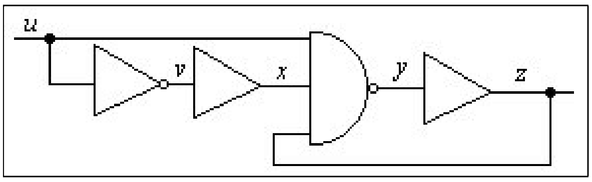

FIGURA 14. Modelul circuitului

6. Circuit cu oscilaţii tranzitorii

În Figura 13 reproducem exemplul unui circuit din [**35**]. Modelul său e desenat în Figura 14. Ca mai înainte, în prima figură cele două porţi logice şi firele au întârzieri, iar intr-a doua, toate întârzierile sunt concentrate în elementele de întârziere. Chiar dacă analiza statică a unui astfel de circuit, când $u, v, x, y, z \in \mathbf{B}$, nu este potrivită datorită buclei de feedback, remarcăm că circuitul propus calculează constanta Booleană 1 deoarece

$$z = y = \overline{u \cdot x \cdot z} = \overline{u \cdot \overline{v} \cdot z} = \overline{u \cdot \overline{u} \cdot z} = \overline{0} = 1.$$

Concluzia este că, atunci când $u, v, x, y, z \in S$, după rezolvarea sistemului, trebuie să obţinem $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = 1$ independent de alegerea lui u, de alegerea condiţiilor iniţiale şi de alegerea tipului de întârzieri.

Alegem întârzieri fixe şi presupunem existenţa lui $t_0 \in \mathbf{R}, \mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{B}$, astfel ca $u_{|(-\infty,t_0)} = \mu_0, v_{|(-\infty,t_0)} = x_{|(-\infty,t_0)} = \mu_1, y_{|(-\infty,t_0)} = z_{|(-\infty,t_0)} = \mu_2$. Ecuaţiile sunt

$$v(t) = \mu_1 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{u(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{6.1}$$

$$x(t) = v(t-d), \tag{6.2}$$

$$y(t) = \mu_2 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{u(t) \cdot x(t) \cdot z(t)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{6.3}$$

$$z(t) = y(t-d'), \tag{6.4}$$

de unde

$$\begin{aligned} x(t) &= \mu_1 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t-d) \oplus \overline{u(t-d)} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t-d) = \\ &= \mu_1 \cdot \chi_{(-\infty,t_0+d)}(t) \oplus \overline{u(t-d)} \cdot \chi_{[t_0+d,\infty)}(t) \quad \text{(din (6.1), (6.2))}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mu_2 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \qquad \text{(din (6.3), (6.4), (6.5))} \\ &\oplus \overline{u(t) \cdot (\mu_1 \cdot \chi_{(-\infty,t_0+d)}(t) \oplus \overline{u(t-d)} \cdot \chi_{[t_0+d,\infty)}(t)) \cdot y(t-d')} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t). \end{aligned} \tag{6.6}$$

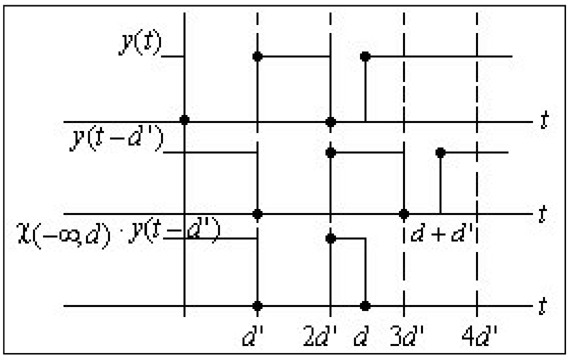

FIGURA 15. Soluţia, cazul $2kd' < d \leq (2k+1)d'$

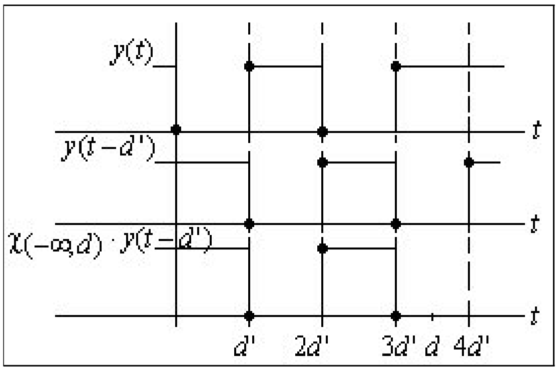

FIGURA 16. Soluţia, cazul $(2k+1)d' < d \leq (2k+2)d'$

Rezolvăm (6.6) în cazul particular $\mu_1 = \mu_2 = 1$ şi $u(t) = 1$. Ecuaţia devine

$$y(t) = \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \overline{\chi_{(-\infty,t_0+d)}(t) \cdot y(t-d')} \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t). \tag{6.7}$$

Soluţia lui (6.7) e următoarea

$2kd' < d \leq (2k+1)d'$ implică

$$y(t) = \begin{cases} \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \chi_{[t_0+d',t_0+2d')}(t) \oplus ... \\ ... \oplus \chi_{[t_0+(2k-1)d',t_0+2kd')}(t) \oplus \chi_{[t_0+d,\infty)}(t), k \geq 1 \\ \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \chi_{[t_0+d,\infty)}(t), k = 0 \end{cases},$$

$(2k+1)d' < d \leq (2k+2)d'$ implică

$$y(t) = \begin{cases} \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \chi_{[t_0+d',t_0+2d')}(t) \oplus ... \\ ... \oplus \chi_{[t_0+(2k-1)d',t_0+2kd')}(t) \oplus \chi_{[t_0+(2k+1)d',\infty)}(t), k \geq 1 \\ \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus \chi_{[t_0+d',\infty)}(t), k = 0 \end{cases},$$

unde $k \in \mathbf{N}$. În Figurile 15 şi 16 am desenat aceste două funcţii pentru $t_0 = 0$ şi $k = 1$.

Ieşirea circuitului $z(t)$ e obţinută din (6.4).

Ideea de rezolvare a ecuaţiei (6.6) în alte cazuri, la fel ca şi comportarea circuitului din Figura 13 sunt evidente în acest moment.

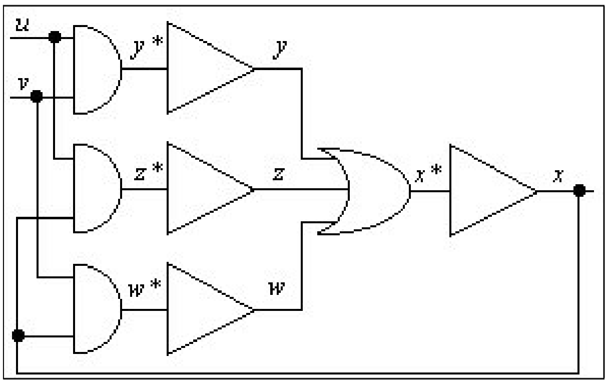

FIGURA 17. Modelul circuitului din Figura 1, pagina 225

7. Exemplul porţii C

Circuitul pe care îl analizăm e desenat în Figura 1, pagina 225, unde porţile logice şi firele au întârzieri şi modelul său e acela din Figura 17, în care porţile şi firele sunt ideale. Există $t_0 \in \mathbf{R}$ şi $\mu_0, ..., \mu_5 \in \mathbf{B}$ aşa ca $u_{|(-\infty,t_0)} = \mu_0$, $v_{|(-\infty,t_0)} = \mu_1$, $y^*_{|(-\infty,t_0)} = y_{|(-\infty,t_0)} = \mu_2$, $z^*_{|(-\infty,t_0)} = z_{|(-\infty,t_0)} = \mu_3$, $w^*_{|(-\infty,t_0)} = w_{|(-\infty,t_0)} = \mu_4$, $x^*_{|(-\infty,t_0)} = x_{|(-\infty,t_0)} = \mu_5$ şi următoarele ecuaţii sunt adevărate:

$$y^*(t) = \mu_2 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus u(t) \cdot v(t) \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{7.1}$$

$$z^*(t) = \mu_3 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus u(t) \cdot x(t) \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{7.2}$$

$$w^*(t) = \mu_4 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus v(t) \cdot x(t) \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t), \tag{7.3}$$

$$x^*(t) = \mu_5 \cdot \chi_{(-\infty,t_0)}(t) \oplus (y(t) \cup z(t) \cup w(t)) \cdot \chi_{[t_0,\infty)}(t). \tag{7.4}$$

Pentru a simplifica analiza, presupunem că $\mu_0 = \mu_1 = ... = \mu_5$. În acest caz (7.1),...,(7.4) devin

$$y^*(t) = u(t) \cdot v(t), \tag{7.5}$$

$$z^*(t) = u(t) \cdot x(t), \tag{7.6}$$

$$w^*(t) = v(t) \cdot x(t), \tag{7.7}$$

$$x^*(t) = y(t) \cup z(t) \cup w(t). \tag{7.8}$$

a) Modelul întârzierii mărginite

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} y^*(\xi) \leq y(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} y^*(\xi), \tag{7.9}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} z^*(\xi) \leq z(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} z^*(\xi), \tag{7.10}$$

$$\bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} w^*(\xi) \leq w(t) \leq \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} w^*(\xi), \tag{7.11}$$

$$\bigcap_{\xi\in[t-D_r,t-D_r+M_r]} x^*(\xi) \le x(t) \le \bigcup_{\xi\in[t-D_f,t-D_f+M_f]} x^*(\xi), \tag{7.12}$$

cu $0 \le m_r \le d_r$, $0 \le m_f \le d_f$, $0 \le M_r \le D_r$, $0 \le M_f \le D_f$ iar condiţiile de compatibilitate sunt îndeplinite sub forma: $d_r \ge d_f - m_f$, $d_f \ge d_r - m_r$ şi respectiv $D_r \ge D_f - M_f$, $D_f \ge D_r - M_r$. Am considerat că cele trei porţi ŞI sunt identice. Eliminăm variabilele intermediare $y^*, z^*, w^*, y, z, w, x^*$

$$\begin{aligned} x(t) &\overset{(7.8),(7.12)}{\ge} \bigcap_{\xi\in[t-D_r,t-D_r+M_r]} (y(\xi)\cup z(\xi)\cup w(\xi)) \ge \\ &\ge \bigcap_{\xi\in[t-D_r,t-D_r+M_r]} y(\xi) \overset{(7.9)}{\ge} \bigcap_{\xi\in[t-D_r,t-D_r+M_r]}\ \bigcap_{\omega\in[\xi-d_r,\xi-d_r+m_r]} y^*(\omega) = \\ &= \bigcap_{\xi\in[t-d_r-D_r,t-d_r-D_r+m_r+M_r]} y^*(\xi) \overset{(7.5)}{=} \bigcap_{\xi\in[t-d_r-D_r,t-d_r-D_r+m_r+M_r]} (u(\xi)\cdot v(\xi)), \end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned} x(t) &\overset{(7.8),(7.12)}{\le} \bigcup_{\xi\in[t-D_f,t-D_f+M_f]} (y(\xi)\cup z(\xi)\cup w(\xi)) = \\ &= \bigcup_{\xi\in[t-D_f,t-D_f+M_f]} y(\xi) \cup \bigcup_{\xi\in[t-D_f,t-D_f+M_f]} z(\xi) \cup \bigcup_{\xi\in[t-D_f,t-D_f+M_f]} w(\xi) \le \\ &\overset{(7.9),(7.10),(7.11)}{\le} \bigcup_{\xi\in[t-D_f,t-D_f+M_f]}\ \bigcup_{\omega\in[\xi-d_f,\xi-d_f+m_f]} y^*(\omega) \cup \\ &\cup \bigcup_{\xi\in[t-D_f,t-D_f+M_f]}\ \bigcup_{\omega\in[\xi-d_f,\xi-d_f+m_f]} z^*(\omega) \cup \\ &\cup \bigcup_{\xi\in[t-D_f,t-D_f+M_f]}\ \bigcup_{\omega\in[\xi-d_f,\xi-d_f+m_f]} w^*(\omega) = \\ &= \bigcup_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]} y^*(\xi) \cup \bigcup_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]} z^*(\xi) \cup \\ &\cup \bigcup_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]} w^*(\xi) = \\ &\overset{(7.5),(7.6),(7.7)}{=} \bigcup_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]} u(\xi)\cdot v(\xi) \cup \\ &\cup \bigcup_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]} u(\xi)\cdot x(\xi) \cup \\ &\cup \bigcup_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]} v(\xi)\cdot x(\xi) = \\ &= \bigcup_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]} (u(\xi)\cdot v(\xi)\cup (u(\xi)\cup v(\xi))\cdot x(\xi)) \le \\ &\le \bigcup_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]} (u(\xi)\cdot v(\xi)\cup u(\xi)\cup v(\xi)) = \\ &= \bigcup_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]} (u(\xi)\cup v(\xi)). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Aşadar, prin cumularea (7.13) şi (7.14),

$$\bigcap_{\xi\in[t-d_r-D_r,t-d_r-D_r+m_r+M_r]}(u(\xi)\cdot v(\xi))\leq x(t)\leq$$
$$\leq\bigcup_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]}(u(\xi)\cup v(\xi)),$$

s-a obţinut un sistem care e foarte asemănător lui $f_{BD}^{m_r+M_r,d_r+D_r,m_f+M_f,d_f+D_f}$.

b) Modelul determinist

Cerem ca (7.13) şi (7.14) să fie îndeplinite împreună cu

$$\overline{x(t-0)}\cdot x(t)\leq\bigcap_{\xi\in[t-d_r-D_r,t-d_r-D_r+m_r+M_r]}(u(\xi)\cdot v(\xi)),\tag{7.15}$$

$$x(t-0)\cdot\overline{x(t)}\leq\bigcap_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]}\overline{u(\xi)}\cdot\overline{v(\xi)}.\tag{7.16}$$

Sistemul (7.13), (7.14), (7.15), (7.16) reprezintă un model determinist, similar lui $f_{BD}^{m_r,d_r,m_f,d_f}\cap f_{RI}^{m_r,d_r,m_f,d_f}$ şi e echivalent cu

$$\overline{x(t-0)}\cdot x(t)=\overline{x(t-0)}\cdot\bigcap_{\xi\in[t-d_r-D_r,t-d_r-D_r+m_r+M_r]}(u(\xi)\cdot v(\xi)),$$
$$x(t-0)\cdot\overline{x(t)}=x(t-0)\cdot\bigcap_{\xi\in[t-d_f-D_f,t-d_f-D_f+m_f+M_f]}\overline{u(\xi)}\cdot\overline{v(\xi)},$$

care e similar sistemului (13.1), (13.2) din Capitolul 13.

Bibliografie

[1] E. Asarin, O. Maler, A. Pnueli, On Discretization of Delays in Timed Automata and Digital Circuits, in R. de Simone and D. Sangiorgi (Eds), Proc. Concur '98, 470-484, LNCS 1466, Springer, 1998

[2] K. Bigelow, www.play-hookey.com, 1996, 2000-2002

[3] M. Bozga, Hou Jianmin, O. Maler, S. Yovine, Verification of Asynchronous Circuits using Timed Automata, Rejected from ASCD'01

[4] J. A. Brzozowski, C-J. H. Seger, Advances in Asynchronous Circuit Theory, Part I: Gate and Unbounded Inertial Delay Models, Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science, Number 42, pp. 198-249, February 1990

[5] J. A. Brzozowski, C-J. H. Seger, Advances in Asynchronous Circuit Theory, Part II: Bounded Inertial Delay Models, MOS Circuits, Design Techniques, Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science, Number 43, pp. 199-263, February 1991

[6] S. Chakraborty, Polynomial-Time Techniques for Approximate Timing Analysis of Asynchronous Systems, Ph.D. Thesis, August, 1998

[7] G. Clark, G. Taylor, The Verification of Asynchronous Circuits Using CCS, Technical Report ECS-LCFS-97-369, Department of Computer Science, University of Edinburgh, October 23, 1997

[8] A. Davis, Steven Mark Nowick, An Introduction to Asynchronous Circuit Design, UUCS-97-013, 1997

[9] A. Dumitriu, The Logical Mechanism of Mathematics (in Romanian), Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucuresti, 1968

[10] I. D. Ion, R. Nicolae, Algebra, ed. Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1981

[11] R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib, Teoria sistemelor dinamice, Editura tehnica, Bucuresti, 1975 (Topics in mathematical system theory, McGraw-Hill Inc, 1969)

[12] M. Kishinevsky, L. Lavagno, P. Vanbekbergen, The Systematic Design of Asynchronous Circuits, ICCAD '95, Tutorial

[13] W. Kwei-Cheung Lam, Algebraic Methods for Timing Analysis and Testing in the High Performance Designs, PhD Thesis, Univ. of California at Berkeley, 1993

[14] L. Lavagno, Synthesis and Testing of Bounded Wire Delay Asynchronous Circuits from Signal Transition Graphs, PhD Thesis, Electrical Engineering and Computer Sciences, Univ. of California at Berkeley, 1992

[15] M. J. Liebelt, Progress Report on Research on the Testing of Asynchronous Circuits, The University of Adelaide, Department of Electrical and Electric Engineering, internal report HPCA-ECS-95/03, 29 December 1995

[16] M. Liebelt, A Proposal for Research on the Testability of Asynchronous Circuits, The University of Adelaide, Department of Electrical and Electric Engineering, Internal Report HPCA-ECS-96/01, August 1998

[17] O. Maler, A. Pnueli, Timing Analysis of Asynchronous Circuits Using Timed Automata, in P. E. Camurati, H. Eveking (Eds), Proc. CHARME'95, 189-205, LNCS 987, Springer, 1995

[18] Z. Manna, A. Pnueli, A hierarchy of temporal properties (invited paper, 1989), Proceedings of the ninth annual ACM symposium on Principles of distributed computing table of contents Quebec City, Quebec, Canada . Pages: 377 – 410, 1990

[19] Z. Manna, A. Pnueli, The anchored version of the temporal framework, Linear Time, Branching Time and Partial Order in Logics and Models for Concurrency, School/Workshop, Pages: 201 – 284, 1988

[20] M. Megan, Proprietes qualitatives des systemes lineaires controles dans les espaces de dimension infinie, Monographies mathematiques, Universite de Timisoara, Timisoara, 1988

[21] Gr. C. Moisil, Teoria algebrica a schemelor cu contacte si relee, Editura tehnica, Bucuresti, 1965

[22] Gr. C. Moisil, The algebraic theory of switching circuits, Pergamon Press and Editura tehnica, Bucharest, 1969

[23] S. M. Nowick, Automatic Synthesis of Burst-Mode Asynchronous Controllers, Technical Report CSL-TR-95-686, 1995 (revised version of PhD dissertation, March 1993)

[24] O. Petlin, S. Furber, Designing C-elements for testability, Technical report UMCS-95-10-2, Department of Computer Science, University of Manchester, 1995

[25] A. Rabinovich, Automata over Continuous Time, Dept. of Computer Science, Tel-Aviv University, June 26, 1997

[26] A. Razafindraibe, M. Robert, P. Maurine, Compact and secured primitives for the design of asynchronous circuits, Journal of Low Power Electronics, Vol 1, 20-26, 2005

[27] P. S. Kay Siegel, Automatic Technology Mapping for Asynchronous Designs, Department of Electrical Engineering, Stanford University, PhD Thesis, 1995

[28] J. Sparso, S. Furber, Principles of asynchronous circuit design - A systems perspective, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001

[29] S. Tasiran, Rajeev Alur, Robert P. Kurshan, Robert K. Brayton, Verifying Abstractions of Timed Systems, In Proc. of 7th International Conference on Concurrency Theory, CONCUR '96, LNCS 1119, Pisa, Italy, 1996, pp. 546-562.

[30] S. Tasiran, Yuji Kukimoto, Robert K. Brayton, Computing Delay with Coupling Using Timed Automata, In Proc. of IEEE/ACM Intl. Workshop on Timing Issues in the Specification and Synthesis of Digital Systems, TAU '97, Austin, TX, 1997.

[31] S. Tasiran, Compositional and Hierarchical Techniques for the Formal Verification of Real-Time Systems, PhD Thesis, Univ. of California at Berkeley, 1998

[32] S. Tasiran, S.P.Khatri, S. Yovine, R.K. Brayton, A. Sangiovanni-Vincentelli, A Timed Automaton-Based Method for Accurate Computation of Circuit Delay in the Presence of Cross-Talk, In Proc. of the 2nd Intl. Conf. on Formal Methods in Computer-aided Design, FMCAD '98, LNCS 1522, Palo Alto, CA, 1998, pp. 149-166.

[33] S E. Vlad, Selected Topics in Asynchronous Automata , Analele Universitatii din Oradea, Fascicola matematica, Tom VII, 1999

[34] S. E. Vlad, An Asynchronous Automata Approach to the Semantics of Temporal Logic, The 8-th Symposium of Mathematics and its Applications, Politehnica University of Timisoara, Timisoara, 1999

[35] S. E. Vlad, The Delay-Insensitivity, the Hazard-Freedom, the Semi-Modularity and the Technical Condition of Good Running of the Discrete Time Asynchronous Automata, Analele Universitatii din Oradea, Fascicola Matematica, TOM VIII, 2001

[36] S. E. Vlad, Towards a Mathematical Theory of the Delays of the Asynchronous Circuits, Analele Universitatii din Oradea, Fascicola Matematica, TOM IX, 2002

[37] S. E. Vlad, Topics in asynchronous systems, Analele Universitatii din Oradea, Fascicola Matematica, TOM X, 2003

[38] S. E. Vlad, The equations of the ideal latches, The 12-th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2004, University of Pitesti, October 15-17, 2004

[39] S. E. Vlad, Asynchronous pseudo-systems, Analele Universitatii din Oradea, Fascicola Matematica, TOM XI, 2004

[40] S. E. Vlad, Real Time Models of the Asynchronous Circuits: The Delay Theory in FOCUS ON COMPUTER SCIENCE, Susan Shannon (Editor), Nova Science Publishers, Inc., 2005

[41] B. Wilkinson, Electronica digitala. Bazele proiectarii, editura Teora, Bucuresti, 2002

ANEXA A

Intersecţii cu logica temporală

Limbajul logicii clasice a propoziţiilor LCP conţine următorii atomi:

- constantele individuale $0, 1 \in \mathbf{B}$, numite şi **antilogie**, respectiv **tautologie**;

- variabilele Boolene $\lambda_1, ..., \lambda_m, ..., \mu_1, ..., \mu_n, ... \in \mathbf{B}$, numite şi **variabile propoziţionale**.

Intuitiv, acestea reprezintă afirmaţii care sunt fie false, fie adevărate. Acelaşi e şi cazul funcţiilor Boolene $H : \mathbf{B}^m \to \mathbf{B}, \mathbf{B}^m \ni (\lambda_1, ..., \lambda_m) \longmapsto H(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{B}$, care se mai numesc **formule** ale LCP. **Conectorii** LCP sunt legile lui $\mathbf{B}$: $\overline{\quad}, \cdot, \cup, \oplus, ...$ etc.

Semantica LCP răspunde întrebării: în interpretarea I care asignează $n-$tuplului de variabile $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ valoarea $\lambda^0 = (\lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)$, avem $H(\lambda^0) = 1$? Dacă da, spunem că H este satisfăcută (sau că e validă, sau că e adevărată, sau că are loc) în I. Acest lucru se notează prin $\lambda^0 \models H$. Funcţia constantă $H = 1$ se identifică cu tautologia şi scriem $\models H$ (H este satisfăcută în orice interpretare).

Logica temporală LT foloseşte, în versiunea din acestă carte, 'cadrul' (în engleză frame) i.e. cuplul $(\mathbf{R}, <)$, unde $\mathbf{R}$=mulţimea numerelor reale='mulţimea lumilor posibile'=mulţimea timpului şi $<$ este ordinea lui $\mathbf{R}$. Când dezbatem condiţiile pe care acest cadru le îndeplineşte, e necesar şi probabil util, să folosim structura algebrică de câmp a lui $\mathbf{R}$, compatibilă cu $<$. Datorită axiomei lui Arhimede, $\mathbf{R}$ satisface proprietăţile de serialitate

$$\forall t, \exists t', t < t'$$

şi de densitate

$$\forall t, \forall t'', t < t'' \Longrightarrow \exists t', t < t' < t''.$$

În plus, $\mathbf{R}$ satisface proprietăţile de completitudine (în sensul marginii superioare): orice submulţime mărginită superior are o cea mai mică limită superioară.

În LT folosită de noi, avem atomii:

- constantele individuale $0, 1 \in S$;

- variabilele pseudo-Boolene $u_1, ..., u_m, ..., x_1, ..., x_n, ... \in S$,

numite ca mai înainte **antilogie**, **tautologie** şi respectiv **variabile propoziţionale**, care sunt din punct de vedere intuitiv considerate ca afirmaţii al căror adevăr e variabil în timp. Formulele lui LT sunt funcţii $\Phi : S^{(m)} \times S^{(n)} \to S$, $S^{(m)} \times S^{(n)} \ni (u_1, ..., u_m, x_1, ..., x_n) \longmapsto \Phi(u_1, ..., u_m, x_1, ..., x_n) \in S$. Primele m coordonate ale argumentului $u = (u_1, ..., u_m)$, grupate sub numele de intrare, au rolul de a afirma condiţii în timp ce ultimele n coordonate ale argumentului $x = (x_1, ..., x_n)$, grupate sub numele de stare, au rolul de a satisface condiţiile afirmate de către u. Maniera în care această satisfacere are loc este descrisă în timp prin funcţia $\Phi(u, x)(t)$.

Semantica LT răspunde întrebării: în interpretarea $\widetilde{I}$ care asignează valoarea $\widetilde{\Lambda} = (\widetilde{u_1}, ..., \widetilde{u_m}, \widetilde{x_1}, ..., \widetilde{x_n})$ $m + n-$tuplului de variabile $\Lambda = (u_1, ..., u_m, x_1, ..., x_n)$, avem $\forall t \in \mathbf{R}, \Phi(\widetilde{\Lambda})(t) = 1$? Dacă răspunsul e pozitiv, obişnuim să spunem că Φ este satisfăcut în $\widetilde{I}$ şi notăm acest lucru prin $\widetilde{\Lambda} \models \Phi$. Dacă există o interpretare $\widetilde{I}$ în care Φ este satisfăcută, Φ se numeşte **sistem asincron dat sub fomă implicită**. Ca şi în cazul LCP, funcţia constantă $\Phi = 1$ se identifică cu tautologia şi cu sistemul autonom $S^{(n)}$ şi notăm $\models \Phi$ (Φ este satisfăcută în orice interpretare).

Conectorii lui LT sunt legile induse de acelea ale lui $\mathbf{B}$ în S, precum şi acelea care se definesc cu ajutorul lui $\bigcap$ şi $\bigcup$. Să menţionăm aici conectorii tradiţionali ai logicii temporale care constau în sisteme deterministe date sub forma explicită:

$$G : S \to S, \forall u \in S, G(u)(t) = \bigcap_{\xi \in [t,\infty)} u(\xi)$$

citit: 'e cazul şi va fi întotdeauna cazul ca u';

$$F : S \to S, \forall u \in S, F(u)(t) = \bigcup_{\xi \in [t,\infty)} u(\xi)$$

citit: 'este sau va fi cazul ca u';

$$H : S \to S, \forall u \in S, H(u)(t) = \bigcap_{\xi \in (-\infty,t]} u(\xi)$$

citit: 'este şi a fost întotdeauna cazul ca u';

$$P : S \to S, \forall u \in S, P(u)(t) = \bigcup_{\xi \in (-\infty,t]} u(\xi)$$

citit: 'este sau a fost cazul ca u';

$$\mathbf{S} : S^{(2)} \to S, \forall u \in S^{(2)}, \mathbf{S}(u)(t) = \bigcup_{t' \in (-\infty,t]} u_1(t') \cdot \bigcap_{\xi \in [t',t]} u_2(\xi)$$

citit: 'u_2 a fost adevărat de la un moment când u_1 a fost adevărat';

$$\mathbf{U} : S^{(2)} \to S, \forall u \in S^{(2)}, \mathbf{U}(u)(t) = \bigcup_{t' \in [t,\infty)} u_1(t') \cdot \bigcap_{\xi \in [t,t']} u_2(\xi)$$

citit: 'u_2 va fi adevărat până la un moment când u_1 va fi adevărat'.

În următoarele variante 'tentante' ale lui G, F, H, P:

$$G_1(u)(t) = \bigcap_{\xi \in (t,\infty)} u(\xi),$$
$$F_1(u)(t) = \bigcup_{\xi \in (t,\infty)} u(\xi),$$
$$H_1(u)(t) = \bigcap_{\xi \in (-\infty,t)} u(\xi),$$
$$P_1(u)(t) = \bigcup_{\xi \in (-\infty,t)} u(\xi),$$

$G_1(u), F_1(u)$ sunt semnale, iar $H_1(u), P_1(u)$ sunt doar diferenţiabile. Dintre variantele lui $\mathbf{S}, \mathbf{U}$

$$\mathbf{S}_1(u)(t) = \bigcup_{t' \in (-\infty,t)} u_1(t') \cdot \bigcap_{\xi \in [t',t]} u_2(\xi),$$
$$\mathbf{U}_1(u)(t) = \bigcup_{t' \in (t,\infty)} u_1(t') \cdot \bigcap_{\xi \in [t,t']} u_2(\xi),$$

prima e diferenţiabilă şi cea de-a doua e semnal.

Am adăugat conectorii limită la stânga şi limită la dreapta:

$$L : S \to Diff, \forall u \in S, L(u)(t) = u(t-0)$$

citit: 'în trecutul recent, a fost încontinuu cazul ca u';

$$R : S \to Diff, \forall u \in S, R(u)(t) = u(t+0)$$

citit: 'în viitorul apropiat, va fi încontinuu cazul ca u' precum şi semi-derivatele şi derivatele definite cu ajutorul lor.

Alţi conectori utilizaţi în carte sunt:

$$f : S \to S, \forall u \in S, f(u)(t) = \bigcap_{\xi \in [t-d_r, t-d_r+m_r]} u(\xi),$$

$$f : S \to S, \forall u \in S, f(u)(t) = \bigcup_{\xi \in [t-d_f, t-d_f+m_f]} u(\xi),$$

$$f : S \to Diff, \forall u \in S, f(u)(t) = \bigcup_{\xi \in (t-d, t)} Du(\xi)$$

etc.

Există o compatibilitate între variabilele propoziţionale şi condiţiile referitoare la cadre exprimată prin aceea că: pentru orice $u \in S$ există un şir nemărginit $t_0 < t_1 < t_2 < ...$ astfel încât u este constant în intervalele $(-\infty, t_0)$, $[t_0, t_1)$, $[t_1, t_2), ...$ Aceasta a fost definiţia semnalelor, al căror scop este, de exemplu, acela de a indica existenţa unui moment iniţial al timpului şi a conectorilor L, R. Pe de altă parte, chiar dacă $\mathbf{R}$ e densă şi completă, pentru fiecare u timpul e discret. Posibilităţile puternice oferite de $\mathbf{R}$ sunt folosite în alegerea lui (t_k).

O întrebare deschisă este: ce se câştigă şi ce se pierde când se consideră două posibilităţi, timpul real şi respectiv timpul discret (când mulţimea timpului este $\mathbf{N}$). Problema formulată nu e defel trivială. Chiar dacă lucrurile nu par neapărat atractive, ne-am întrebat uneori dacă în loc de $\mathbf{R}$ am putea utiliza $\mathbf{Q}$ ca mulţime a timpului şi care este exact rolul completitudinii lui $\mathbf{R}$ (care face diferenţa dintre cele două mulţimi) în această carte.

ANEXA B

Index

ANEXA C

Lista notaţilor

ANEXA D

Asynchronous systems theory

1. Contents

2. Introduction

Professor Grigore Moisil (1906-1973) is one of the computer science founders and its applications in Romania. He founded the school of the switching theory and the associated polyvalent logic. Among the members of his school we can mention the following: George Georgescu, Serban Basarab, Ioana Petrescu (married Voiculescu), Sergiu Rudeanu, Petre Ivanescu, Gheorghe Nadiu, A. Deleanu, Toma Gaspar, I. Muntean, Dragos Vaida, Gh. Ioanin, P. Constantinescu, C. Popovici, Mariana Coroi-Nedelcu.

Professor Moisil was a brilliant mind who had a profound influence on the Romanian mathematical thinking by pointing out the necessity of its orientation towards basic applications. He sensed the huge importance of automatized computations for humanity as early as the 50's of the last century but, of course, his ideas were premature, in a mathematical atmosphere dominated by Bourbaki's trend favorable rather to pure theoretical studies than to concrete applications. For instance, in 1965 [**21**] he introduced in his book a genuine collection of circuits[1] and proposed the readers to go on with their investigation. Year by year, together with his co-workers he studied various aspects of the so-called theoretical informatics, during seminars and, especially, during the communication sessions of the system

[1]The words: switching circuit, asynchronous circuit, circuit, network are considered to be synonims in this context.

theory group held at the Faculty of Mathematics, Bucharest University. Little by little, the investigations moved almost completely to the pure theoretical aspects. Even more, to our knowledge, at the beginning of the 70's, the research in the field of switching theory practically stopped, in spite of the unanimous recognition of its importance.

The discrete-time modeling of the switching phenomena introduced by Moisil proved to be a pioneering approach, but also represented a limit of his theory. Indeed, at that time, the question about the degree in which the discrete time modeling can approximate the realistic continuous time modeling was left aside.

Subsequently, under the evidence of concrete examples, the mathematical community was forced to consider more carefully the problem of the relationship between discrete and continuous-time modeling. Our investigations on switching circuits were influenced by Moisil's ideas, although not directly: we learnt about his research during university studies. By that time, the digital electrical engineering was rather descriptive than mathematically formalized. Therefore, with a view to deeply understand the phenomena in switching circuits, we became interested in their mathematical formalization. A hard work of documentation followed, hoping to find the mathematics underlying these circuits. To our big surprise, we found almost nothing in our field of interest, in particular the study of the $\mathbf{R} \to \{0,1\}$ functions. In fact in the late 80's Professor Sergiu Rudeanu confirmed the lack of such a study in the mathematics of the world. As a result, by the year 2000 and even earlier we started with a systematic investigation of the asynchronous circuits and the construction of the necessary mathematical tools. These led us to two distinct categories of circuits. Roughly speaking, the first category contains delay circuits that, connected in series, keep the model and the second category contains delay circuits that, connected in series, do not keep the model. By identifying the circuit with its model, the same idea may be expressed as: *two delay circuits connected in series form a delay circuit* in the first category while in the second, *two delay circuits connected in series do not form a delay circuit*.

The splitting in two categories solved the so called paradox we noticed in 2001. Namely, we found by following the descriptive theories of our former professors two delay circuits connected in series that were not of the same kind like each of them taken separately. This was a particular case of circuits of the second category, which our professors considered to be circuits of the first category.

Our book is intended to construct a mathematical theory of modeling the asynchronous circuits.

The asynchronous systems theory is a branch of the systems theory that has the purpose of bringing under a common framework the mathematical models of the asynchronous circuits from the digital electrical engineering. It uses:

- the general concepts of system and pseudo-system providing models for the functional blocks, where modeling is present at a synthetical level as well as

- the particular concept of delay (stable system with 1-dimensional input and 1-dimensional output), providing models for the gates and wires, where modeling is present at an analytical level.

The concepts of asynchronous system and asynchronous pseudo-system were introduced in [**37**], [**39**]. We have defined them in the sense that can be referred to in literature as 'the input-output behavior of a non-initialized, non-deterministic system', i.e. as multi-valued functions.

Roughly speaking, the n-dimensional signals are the 'nice' $\mathbf{R} \to \{0,1\}^n$ functions while an (asynchronous) system is a multi-valued function that associates with an m-dimensional signal, called an (admissible) input, a non-empty set of n-dimensional signals, called the (possible) states. The input and the states are required to have a limit as $t \to -\infty$ (an initial value). More general than that, an (asynchronous) pseudo-system possesses:

- signals without limit as $t \to -\infty$ (without initial values);

- the possibility that to an input $u : \mathbf{R} \to \{0,1\}^m$ there may correspond an empty set of states, i.e. non-admissible inputs exist.

The naturalness of our concept of pseudo-system consists in the fact that:

- it highlights the duality between the initial values and the final values of the states. The dual properties of initialization and stability can be defined in this context, that includes a duality between the initial time and the final time too;

- we must take into account the fact that very simple circuits like the RS latch, for example, have non-admissible inputs ($R \cdot S = 1$ is such an input).

A subsidiary aim of the book is to propose open problems, such as: the characterization of the Huffman systems, what is the role of injectivity and surjectivity, what non-anticipation is - things that seem to be very familiar.

The mathematical facts we presented may also be useful in studying the general topics of the systems theory. Here are some of them:

- synthesis, model checking (for detecting errors in hardware designs);
- stability;
- feedback, control;
- optimization, optimal control (for example minimal time);
- controllability, accessibility;
- structural decomposability.

It is interesting as well to establish the connections between this theory and other theories: Petri nets, temporal logic, timed automata.

The book addresses to researchers in computer science, mathematicians and electrical engineers interested in modeling asynchronous circuits. Its applications are useful to the electrical engineers.

3. A short abstract

The book is organized in three parts: the first is dedicated to the general systems theory, the second to the delay theory and the third to applications. Each part contains several chapters and the chapters are structured in sections. The important equations and logical properties are numbered. Thus (4.3) refers to the third outlined equation or logical property of the fourth section of the current chapter; when we refer to equation (4.3) from the current chapter we do not need to indicate the chapter, while when we refer to the same equation from another chapter, we need to indicate the chapter because it does not follow from this number. The end of the book has four appendices: one showing some intersections with temporal logic, an index, a list of notations and an abstract in English.

Chapter 2 contains the mathematical framework necessary to model the switching circuits: spaces of $\{0,1\}-$valued functions and operations on them. In Chapter 3 we introduce a large class of models, namely the pseudo-systems and a few concepts related to them (initial and final states, initial and final time and initial and final state functions). The most important type of the set of pseudo-systems consists of the so-called systems. They represent that particular case of non-empty pseudo-systems characterized by the existence of the initial values of the inputs and of the states. The systems are treated in Chapter 4 together with some new notions of further interest. In Chapter 5 particular cases of systems are introduced and their properties are largely investigated and commented. The next chapter deals with the accesses and the transfers of the systems. The surjectivity, controllability and accessibility are the matters of Chapter 7, where comparisons with other variants existing in the literature are made. Three types of stability of systems are the subject of Chapter 8. A few examples are included. In Chapter 9, after a brief presentation of the known non-formalized definitions of the fundamental mode, the fundamental transfers are introduced and analyzed. Then, the fundamental mode is introduced, by using these transfers and its properties are investigated. The relations between the fundamental mode and accessibility are studied. Part 2 is dedicated to the delay theory. It starts with the introduction and study of delays, in Chapter 10. Several types of delays are included. The special class of bounded delays is investigated in Chapter 11, while in Chapters 12 and 13 the absolutely inertial delays and the relatively inertial delays are treated. All these three chapters differ from the previous ones in the sense that they contain a larger comparison of our notions and the traditional ones. The meaning and the interest for applications of the presented notions and properties are carefully commented. Part 3 of the book is dedicated to applications.